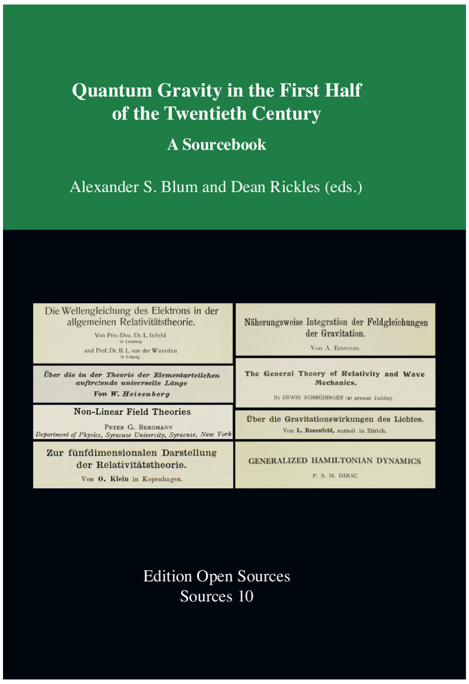
Edition Open Sources
Sources 10

Alexander S. Blum and Dean Rickles:

Oskar Klein (1927): Zur fünfdimensionalen Darstellung der Relativitätstheorie

DOI: 10.34663/9783945561317-11



In: Alexander S. Blum and Dean Rickles (eds.): *Quantum Gravity in the First Half of the Twentieth Century : A Sourcebook*
Online version at https://edition-open-sources.org/sources/10/

ISBN 978-3-945561-31-7, DOI 10.34663/9783945561317-00

The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at http://dnb.d-nb.de

Chapter 9
Oskar Klein (1927): Zur fünfdimensionalen Darstellung der Relativitätstheorie

Oskar Klein. Zur fünfdimensionalen Darstellung der Relativitätstheorie. *Zeitschrift fur Physik*, 46: 188–208.

Zur fünfdimensionalen Darstellung der Relativitätstheorie.

Von O. Klein in Kopenhagen.

(Eingegangen am 22. Oktober 1927.)

Die sogenannte fünfte Dimension wird als der elektrischen Ladung konjugiert im Sinne der Quantentheorie aufgefaßt. Die Nichtbeobachtbarkeit der fünften Dimension wird hierdurch mit der Existenz des elektrischen Elementarquantums in Zusammenhang gebracht. Es wird versucht, eine einfache einheitliche Darstellung der Gesetze der Relativitätstheorie, insbesondere der fünf Erhaltungssätze für Impuls, Energie und Elektrizitätsmenge zu geben mit Hilfe der zuerst von Kaluza vorgeschlagenen fünfdimensionalen Riemannschen Geometrie.

Einleitung. Durch die Entwicklung der Quantentheorie haben bekanntlich die Begriffe Raum und Zeit den unmittelbaren Sinn verloren, der ihnen in der älteren Physik und auch in der Relativitätstheorie zugeschrieben wurde. Dies hängt, wie besonders Bohr* hervorgehoben hat, schon damit zusammen, daß unsere Meßwerkzeuge (Licht und freie materielle Teilchen) nach der Quantentheorie ein Verhalten zeigen, welches durch das Dilemma Korpuskel–Welle charakterisiert wird, wodurch eine scharfe Definition einer raumzeitlichen Koinzidenz, wie sie der gewöhnlichen Raum—Zeitauffassung zugrunde liegt, unmöglich wird. Von diesem Gesichtspunkt aus ist zu erwarten, daß die allgemeine Relativitätstheorie einer Revision im Sinne des Quantenpostulats bedürftig ist, wie dies auch daraus hervorgeht, daß verschiedene ihrer Konsequenzen mit den Forderungen der Quantentheorie im Widerspruch sind**.

Es zeigt sich nun bei der Betrachtung der Definitions- und Beobachtungsmöglichkeiten ein eigentümliches reziprokes Verhältnis der Raum–Zeitbeschreibung zu der Erhaltung von Energie und Impuls***. Dies hängt auf das innigste damit zusammen, daß nach de Broglie den freien materiellen Teilchen ebenso wie der Strahlung im leeren Raum — die einzigen Fälle, wo es bisher möglich war, in der Quantentheorie den

* N. Bohr, Die Naturwissenschaften. Im Erscheinen. Vgl. auch W. Heisenberg, ZS. f. Phys. **43**, 172, 1927.

** Zum Beispiel würde die Einsteinsche Strahlenablenkung an einer Anzahl im Zustand statistischen Temperaturgleichgewichts sich bewegender materieller Körper das Strahlungsgleichgewicht stören, was eine Art gravitationellen Comptoneffekt vermuten läßt. Ein entsprechendes Resultat wird man — schon durch das Nichtauftreten der Planckschen Konstante in den betreffenden Gleichungen — im Fall eines statistischen Gleichgewichts zwischen Gravitationswellen und Lichtwellen nach den Gesetzen der allgemeinen Relativitätstheorie erwarten.

*** N. Bohr, l. c.

Forderungen der Relativitätstheorie streng zu genügen — eine Wellenphase zuzuordnen ist, worin Raum—Zeitkoordinaten und Komponenten des Impuls—Energievektors in symmetrischer Weise auftreten. In dieser Weise erscheinen die Erhaltungssätze, im Anschluß an die Vorstellungen der Lichtquantentheorie, als verallgemeinerte Frequenzbedingung, wie dies besonders durch die Erfahrungen beim Comptoneffekt nahegelegt wird.

Wenn man an die scheinbar etwas zufällige Rolle der Erhaltungssätze in der analytischen Mechanik, als vier der vielen möglichen Integrale der Bewegungsgleichungen, denkt, so könnte es nach dem eben erwähnten Gesichtspunkt scheinen, als ob die Raum—Zeitgrößen, die für unsere unmittelbaren Erfahrungen von so zentraler Bedeutung sind, in dem mathematischen Gebäude der zukünftigen Quantentheorie in den Hintergrund treten würden. Ungeachtet der großen Fruchtbarkeit der Quantenmechanik spricht indessen vieles dafür, daß der Ausgangspunkt für eine allgemeine mathematische Formulierung der Quantentheorie eher in den Feldgleichungen der klassischen Theorie zu suchen ist, als in den Bewegungsgleichungen der Punktmechanik. Hierdurch würde die Frage nach der Rolle der Raum—Zeitgrößen (oder vielmehr ihres quantentheoretischen Analogons) in ein anderes Licht rücken, denn ein großer Teil der für die Feldtheorie charakteristischen Zustandsgrößen (die Einsteinschen Gravitationspotentiale) sind ja formal unmittelbar an die Raum—Zeitbegriffe geknüpft.

Im Hinblick auf diese Verhältnisse, also einerseits die Auflösung der gewöhnlichen Raum—Zeitauffassung durch die Quantentheorie und andererseits die anscheinende Notwendigkeit durch sinngemäße Umschreibung der gewöhnlichen Feldtheorie und im nächsten Anschluß an die Erhaltungssätze für Impuls und Energie die Begriffe Raum und Zeit neu zu begründen, liegt es nahe, den fünften allgemeinen Erhaltungssatz, die Erhaltung der Elektrizitätsmenge, als Ausgangspunkt für die Einführung einer neuen der elektrischen Ladung konjugierten Größe zu betrachten, die den vier raum—zeitlichen Koordinaten als formal gleichwertig an die Seite zu treten hat.

Die Existenz eines elektrischen Elementarquantums führt hierbei eine eigentümliche Situation mit sich, die beim ersten Anblick scheinbar gegen eine Zuordnung der Erhaltung der Elektrizität zu den übrigen Erhaltungssätzen spricht. Durch die naheliegende Annahme, daß die Existenz der Elementarladung die Folge der Quantisierung einer in dem entsprechenden klassischen Modell kontinuierlich veränderlichen Größe ist, verliert jedoch dieses Argument seine Beweiskraft. Würde doch auch, bei bestimmten, der Relativitätstheorie nicht widersprechenden Annahmen, die Impulskomponente in irgend einer Richtung nur diskrete Werte annehmen.

Die Tatsache, daß ein freies elektrisches Teilchen stets eine bestimmte Ladung hat, hat aber nach der hier vertretenen Auffassung die prinzipielle Nichtbeobachtbarkeit der neuen Dimension zur Folge. Dies ist eine einfache Folgerung aus der Dirac-Jordanschen statistischen Formulierung der Quantentheorie, die besonders klar in der von Bohr begründeten Auffassung der Zusammenhänge zwischen Definition und Beobachtung zum Ausdruck kommt. Diese Nichtbeobachtbarkeit der neuen Dimension, die mit der Tatsache, daß unsere Erfahrungen — abgesehen von der aus dem Quantenpostulat herrührenden Begrenzung — sich mit Hilfe der Begriffe Raum und Zeit ordnen lassen, übereinstimmt darf nicht als Beweis der Überflüssigkeit des Begriffs der fünften Dimension betrachtet werden. Als schlagendes Beispiel für die Nützlichkeit einer nicht-beobachtbaren Größe in der Quantenmechanik sei die Eigenrotation des Elektrons erwähnt, die klassisch mit Hilfe eines Winkels beschrieben wird, welcher in der Quantentheorie prinzipiell unbeobachtbar ist.

Wie zuerst Kaluza hervorgehoben hat, wird durch die Einführung einer fünften Dimension in die Relativitätstheorie in der Tat eine innige Verschmelzung der Gesetze des Elektromagnetismus mit denen der Gravitation erzielt, wodurch die Zustandsgrößen, welche das elektromagnetische Feld (die elektromagnetischen Potentiale) charakterisieren, in einer ähnlichen Beziehung zu den metrischen Größen erscheinen wie die Einsteinschen Gravitationspotentiale in der gewöhnlichen Form der Relativitätstheorie. Hierdurch und nach dem erwähnten Gesichtspunkt scheint sich diese fünfdimensionale Form der Relativitätstheorie als der natürliche Ausgangspunkt für eine allgemeine Quantenfeldtheorie darzubieten. Im Hinblick hierauf soll im folgenden ein Versuch zu einer zusammenfassenden Darstellung der Grundlagen dieser Form der Relativitätstheorie versucht werden, wobei der Rahmen der klassischen Theorie — abgesehen von einigen einfachen Betrachtungen zur Wellenmechanik — noch nicht verlassen wird. Es handelt sich also um eine nur in formaler Hinsicht von der gewöhnlichen Relativitätstheorie sich unterscheidende Darstellung*.

§ 1. Der Erhaltungssatz bei den elektrischen Teilchen. An den in der Einleitung entwickelten Gesichtspunkt anknüpfend, wollen wir

* Das folgende bildet eine sehr verspätete ausführlichere Darstellung der Bestrebungen des Verfassers zur fünfdimensionalen Form der Relativitätstheorie,

zuerst die Erhaltungssätze in dem einfachen Fall eines elektrisch geladenen Teilchens betrachten. Die Erhaltung von Energie und Impuls wird hier durch die Bewegungsgleichungen ausgedrückt, während die Erhaltung der Elektrizität einfach aussagt, daß die Ladung des Teilchens konstant bleibt. Nehmen wir zuerst an, daß kein elektromagnetisches Feld vorhanden ist. Die Bewegung geht dann nach Einstein auf geodätischen Linien der Raum—Zeitmannigfaltigkeit vor sich. Es sei die Lage des Teilchens durch die vier Raum—Zeitkoordinaten x^1, x^2, x^3, x^4 definiert. Das zu dem Teilchen gehörige Differential der Eigenzeit ist dann gegeben durch

$$d\tau = \sqrt{-\frac{g_{ik}}{c^2}\,dx^i\,dx^k},$$

wo c die Vakuumlichtgeschwindigkeit bedeutet, und die g_{ik} die zehn Komponenten des metrischen Fundamentaltensors bezeichnen, die nach Einstein sowohl die metrischen als auch die gravitationellen Eigenschaften des Raumes zum Ausdruck bringen. Führen wir die kovarianten Komponenten des Impulsenergievektors des Teilchens p_1, p_2, p_3, p_4 ein, wo

$$p_i = m\,g_{ik}\,\frac{d x^k}{d\tau} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{1}$$

und m die Masse des Teilchens bedeutet, so lassen sich die Bewegungsgleichungen, d. h. die Gleichungen der geodätischen Linien, bekanntlich auf die folgende Hamiltonsche Form bringen:

$$\frac{d x^i}{d\tau} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}, \quad \frac{d p_i}{d\tau} = -\frac{\partial H_0}{\partial x^i}, \quad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{2}$$

wo

$$H_0 = \frac{1}{2m}\,g^{ik}\,p_i\,p_k. \tag{3}$$

die — da sich inzwischen verschiedene Forscher mit diesem Thema beschäftigt haben — von mathematischen Resultaten wohl kaum neues bringt. Ich hoffe, daß dieselbe doch etwas Interesse beanspruchen darf, da sie sich sowohl durch die physikalischen Gesichtspunkte wie durch die Form von den übrigen Arbeiten — auch den früheren Arbeiten des Verfassers — unterscheidet. Insbesondere halte ich es nicht mehr für möglich, durch die Einführung einer fünften Dimension den von der Quantentheorie geforderten Abweichungen von der Raum—Zeitbeschreibung der klassischen Theorie gerecht zu werden. Hier sei auf die von de Broglie gegebene Übersicht über den Gegenstand hingewiesen (Journ. de phys. **8**, 65, 1927). Ausführliche Literaturangaben findet man bei L. Rosenfeld, Acad. Roy. de Belgique (5) **13**, Heft 6, 1927. Vgl. außerdem H. Mandel (ZS. f. Phys. **39**, 136, 1926; **45**, 285, 1927), der unabhängig von Kaluza und dem Verfasser zu der fünfdimensionalen Darstellung gekommen ist, sowie F. Gonseth und G. Juvet, C. R. **185**, 341, 412, 448, 535, 1927.

Wir fügen nun zu den Koordinaten x^1, x^2, x^3, x^4 eine weitere fünfte Koordinate x^0 hinzu und zu den Impulsenergiekomponenten p_1, p_2, p_3, p_4 eine zu x^0 konjugierte Größe p_0, die gemäß dem in der Einleitung Gesagten proportional der Ladung e des Teilchens angenommen werden soll. Setzen wir

$$p_0 = \frac{e}{\beta c}, \tag{4}$$

wo β eine später zu bestimmende universelle Konstante bezeichnet von der Dimension einer elektrischen Ladung dividiert durch eine Energie. Zu den Gleichungen (2) können wir also das Paar hinzufügen

$$\frac{d x^0}{d\tau} = \frac{\partial H_0}{\partial p_0} = 0, \quad \frac{d p_0}{d\tau} = -\frac{\partial H_0}{\partial p_0} = 0 \tag{5}$$

als Ausdruck der Konstanz der elektrischen Ladung.

Wir fragen demnächst nach der Form der entsprechenden Gleichungen bei der Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes, das wir durch die vier Komponenten φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 des elektromagnetischen Potentialvektors charakterisieren wollen. Bekanntlich lassen sich auch in diesem Falle die Bewegungsgleichungen auf Hamiltonsche Form bringen, wenn wir für die Hamiltonsche Funktion setzen

$$H = \frac{1}{2m} g^{ik} \left(p - \frac{e}{c}\varphi_i\right)\left(p_k - \frac{e}{c}\varphi_k\right) + \text{const.} \tag{6}$$

In diesem Ausdruck ersetzen wir e/c durch βp_0 und nehmen aus später ersichtlichen Gründen die beliebige additive Konstante in H gleich $\frac{1}{2m} p_0^2$ an. Den resultierenden Ausdruck können wir folgendermaßen schreiben

$$H = \frac{1}{2m} \{g^{ik} p_i p_k - 2\beta \varphi^k p_k p_0 + (1 + \beta^2 \varphi_k \varphi^k) p_0^2\}, \tag{7}$$

wo die φ^k die kontravarianten Komponenten des Potentialvektors bedeuten. Wie wir sehen, hat dieser Ausdruck eine entsprechende Form wie der Ausdruck (3) für die zu den geodätischen Linien gehörige Hamiltonsche Funktion. Dies führt uns dazu, versuchsweise eine solche Metrik des fünfdimensionalen Raumes einzuführen, daß die kontra varianten Komponenten γ^{ik} des Fundamentaltensors gegeben sind durch

$$\gamma^{ik} = g^{ik}, \quad \gamma^{i0} = -\beta \varphi^i, \quad \gamma^{00} = 1 + \beta^2 \varphi_k \varphi^k \quad (i, k = 1, 2, 3, 4). \tag{8}$$

Wir können nämlich dann schreiben

$$H = \frac{1}{2m} \sum \gamma^{ik} p_i p_k, \tag{9}$$

wo das Summenzeichen wie überall im folgenden eine Summation von 0 bis 4 über doppelt auftretende Indizes andeuten soll. Die kanonischen Gleichungen

$$\frac{d x^i}{d \tau} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{d p_i}{d \tau} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4) \tag{10}$$

sind nun die Gleichungen fünfdimensionaler geodätischer Linien, von denen das erste Paar die Erhaltung der Ladung (wegen des Nichtvorkommens von x^0 in H) bzw. die Definition von $\frac{d x^0}{d \tau}$ ausdrücken, während die vier übrigen Paare die Bewegungsgleichungen darstellen.

Wenn γ_{ik} die kovarianten Komponenten des Fundamentaltensors bezeichnen, so ergibt sich aus (9) auf Grund von (10)

$$p_i = m \sum \gamma_{ik} \frac{d x^k}{d \tau}. \tag{11}$$

Wenn andererseits die Form (7) von H benutzt wird, so folgt aus (10)

$$m \frac{d x^0}{d \tau} = (1 + \beta^2 \varphi_k \varphi^k) p_0 - \beta \varphi^k p_k, \quad m \frac{d x^i}{d \tau} = g^{ik} p_k - \beta \varphi^i p_0$$
$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

oder

$$p_i = m g_{ik} \frac{d x^k}{d \tau} + \beta p_0 \varphi_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{12}$$

und also auch

$$p_0 = m \left\{ \frac{d x^0}{d \tau} + \beta \varphi_k \frac{d x^k}{d \tau} \right\},$$
$$p_i = m \left\{ \beta \varphi_i \frac{d x^0}{d \tau} + (g_{ik} + \beta^2 \varphi^i \varphi_k) \frac{d x^k}{d \tau} \right\} (i, k = 1, 2, 3, 4), \tag{13}$$

woraus durch Vergleich mit (11) folgt

$$\gamma_{ik} = g_{ik} + \beta^2 \varphi_i \varphi_k, \quad \gamma_{i0} = \beta \varphi_i, \quad \gamma_{00} = 1 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4). \tag{14}$$

Aus diesen Werten für die γ_{ik} ersieht man, daß dem Quadrat $d\sigma^2$ des fünfdimensionalen Linienelements die folgende Form gegeben werden kann

$$d\sigma^2 = d\vartheta^2 + d s^2, \tag{15}$$

wo

$$d s^2 = g_{ik} d x^i d x^k \tag{16}$$

das Quadrat des Einsteinschen Linienelements bezeichnet, während

$$d\vartheta = d x^0 + \beta \varphi_i d x^i. \tag{17}$$

Aus der letzten Form des Linienelements können wir leicht das gewonnene Resultat verifizieren, daß die Bewegungsgleichungen zusammen mit der Erhaltung der Ladung durch die Gleichungen fünfdimensionaler geodätischer Linien dargestellt werden können. Es lassen sich nämlich die zu (15) gehörigen geodätischen Linien durch die folgenden Lagrangeschen Gleichungen darstellen:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \frac{d x^i}{d\tau}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^i} \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4), \tag{18}$$

wo

$$L = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 = \frac{m}{2}\left\{g_{ik}\frac{d x^i}{d\tau}\frac{d x^k}{d\tau} + \left(\frac{d x^0}{d\tau} + \beta \varphi_i \frac{d x^i}{d\tau}\right)^2\right\}. \tag{19}$$

Betrachten wir nun außerdem die folgende Größe

$$L_0 = \frac{m}{2} g_{ik}\frac{d x^i}{d\tau}\frac{d x^k}{d\tau} + \beta p_0 \varphi_i \frac{d x^i}{d\tau}, \tag{20}$$

so sehen wir leicht, daß wenn x irgend eine der Größen x^1, x^2, x^3, x^4, $\frac{d x^1}{d\tau}$, $\frac{d x^2}{d\tau}$, $\frac{d x^3}{d\tau}$, $\frac{d x^4}{d\tau}$ bedeutet, $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L_0}{\partial x}$ ist. In den vier der Gleichungen (18), welche die Bewegung des Teilchens ausdrücken, dürfen wir also L durch L_0 ersetzen, bekommen aber dann, wegen $\beta p_0 = e/c$, die bekannte Lagrangesche Form der Bewegungsgleichungen eines elektrischen Teilchens.

Für elektrische Teilchen in einem gravitationellen und elektromagnetischen Felde lassen sich also die fünf Erhaltungssätze in die Aussage zusammenfassen: Die „Bahn" eines elektrischen Teilchens in der fünfdimensionalen Mannigfaltigkeit ist eine geodätische Linie des Linienelements (15). Die Konstanz der elektrischen Ladung erscheint hierbei als Folge des Nichtvorkommens von x^0 in den Komponenten des fünfdimensionalen metrischen Fundamentaltensors.

Es mag bemerkt werden, daß die in der gewöhnlichen Form der Relativitätstheorie fremdartig anmutende Form der Momente

$$p_i = m u_i + \frac{e}{c}\varphi_i,$$

wo u_1, u_2, u_3, u_4 die kovarianten Komponenten der Vierergeschwindigkeit bedeuten [vgl. Gleichung (12)], in der fünfdimensionalen Darstellung in einem natürlichen Lichte erscheint. Nach (11) hat man in der Tat

$$p_i = m \sum \gamma_{ik}\frac{d x^k}{d\tau},$$

wo

$$\sum \gamma_{ik}\frac{d x^k}{d\tau}$$

offenbar eine in bezug auf die fünfdimensionale Metrik kovariante Komponente der „Fünfergeschwindigkeit" bedeutet.

§ 2. Invarianzeigenschaften der betrachteten fünfdimensionalen Mannigfaltigkeit. Nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen werden wir versuchen, die Gesetzmäßigkeiten der Relativitätstheorie allgemein mit Hilfe einer fünfdimensionalen Riemannschen Geometrie darzustellen. Da wir fürs erste nicht den Rahmen der gewöhnlichen Relativitätstheorie verlassen wollen, ist es zweckmäßig, hierbei die Koordinatenwahl so zu beschränken, daß vier der fünf Koordinaten (sagen wir x^1, x^2, x^3, x^4) sich stets auf die in wohlbekannter Weise definierte Raum–Zeitmannigfaltigkeit der Relativitätstheorie beziehen. Um zu den gewöhnlichen physikalischen Gesetzen zu gelangen, müssen wir die fundamentale Annahme über das Linienelement $d\sigma$ des fünfdimensionalen Raumes machen, daß bei geeigneter Wahl der fünften Koordinate die Größen γ_{ik} nur von den Raum–Zeitkoordinaten x^1, x^2, x^3, x^4 abhängen. Wir werden dann die Koordinatenwahl in bezug auf x^0 so einschränken, daß diese Bedingung in allen zum Gebrauch gelangenden Koordinatensystemen erfüllt ist. Dies mag als ein — wohl vorläufiger — Ausdruck für die in der Einleitung erwähnte Nichtbeobachtbarkeit der fünften Dimension betrachtet werden.

Betrachten wir nun eine durch die folgenden Gleichungen ausgedrückte Koordinatentransformation

$$x^{0'} = \psi(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4), \quad x^{i'} = \psi_i(x^1, x^2, x^3, x^4) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

so folgt

$$d x^{0'} = \sum \frac{\partial \psi}{\partial x^i} d x^i = \sum \alpha^i d x^i.$$

Die Größen $\alpha_i = \dfrac{\partial \psi}{\partial x^i}$ müssen aber auf Grund des eben Gesagten von x^0 unabhängig sein, da diese Koordinate sonst in den γ'_{ik} auftreten würde. Man hat nun

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial x^i} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^0} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Folglich muß α_0 eine Konstante sein, die wir stets gleich Eins annehmen wollen, da diese weitere Einschränkung, wie wir gleich sehen werden, die Gleichheit einer gegebenen elektrischen Ladung in allen erlaubten Bezugssystemen zur Folge hat. Durch unsere Annahmen reduzieren sich also die zugelassenen Koordinatentransformationen auf die folgende Gruppe

$$x^{0'} = x^0 + \psi_0(x^1, x^2, x^3, x^4), \quad x^{i'} = \psi_i(x^1, x^2, x^3, x^4) \quad (i = 1, 2, 3, 4). \qquad \text{(A)}$$

Wir wollen die Invarianzeigenschaften der in Betracht kommenden Vektoren und Tensoren der Gruppe (A) gegenüber untersuchen. Es seien $\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4$ die kontravarianten Komponenten eines fünfdimensionalen Vektors. Wir bilden die Komponenten desselben Vektors in dem gestrichenen Koordinatensystem. Für $i = 1, 2, 3, 4$ hat man

$$\sigma^{i'} = \sum \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\mu} \sigma^\mu = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\mu} \sigma^\mu.$$

Die Komponenten $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4$ verhalten sich folglich wie die kontravarianten Komponenten eines Vierervektors. Betrachten wir auch die kovariante Komponente σ_0. Es ist

$$\sigma_0 = \sum \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^0} \sigma'_\mu = \sigma'_0.$$

Die Größe σ_0 ist also eine Invariante, woraus nach (4) die Invarianz der Ladung folgt.

Betrachten wir demnächst einen fünfdimensionalen Tensor zweiten Ranges mit den Komponenten Θ^{ik}. Wir haben dann für $i, k = 1, 2, 3, 4$

$$\Theta^{ik'} = \sum \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^\nu} \Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^\nu} \Theta^{\mu\nu}.$$

Die raum-zeitlichen kontravarianten Komponenten des Tensors bilden demnach einen vierdimensionalen Tensor. Für die gemischten Komponenten $\Theta_0^{\;i}$, wo $i = 1, 2, 3, 4$, hat man ferner

$$\Theta_0^{\;i'} = \sum \Theta_\mu^{\;\nu} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{0'}} = \Theta_0^{\;\nu} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\mu}.$$

Diese bilden also einen Vierervektor, und das gleiche gilt von den Komponenten $\Theta^i_{\;0}$. Die Komponente Θ_{00} bildet eine Invariante, denn es gilt

$$\Theta_{00} = \sum \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^0} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^0} \Theta'_{\mu\nu} = \Theta'_{00}.$$

Schließlich betrachten wir die Größe $\sum \Theta_{0i}\, d x^i$. Da

$$\Theta_{0i} = \sum \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^0} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^i} \Theta'_{\mu\nu} = \sum \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^i} \Theta'_{0\nu},$$

so hat man

$$\sum \Theta_{0i}\, d x^i = \sum \Theta'_{0\nu} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^i} d x^i = \sum \Theta'_{0\nu}\, d x^{\nu'}.$$

Auch diese Größe bildet folglich eine Invariante, was natürlich auch von der Größe $\sum \Theta_{i0}\, d x^i$ gilt.

Wenden wir diese Resultate auf den Fundamentaltensor γ_{ik} an, so folgt erstens, daß die Festsetzung $\gamma^{ik} = g^{ik}$ für $i, k = 1, 2, 3, 4$ mit den Transformationen (A) verträglich ist. Aus dem Umstand, daß $\sum \gamma_{0i}\,d x^i$ eine Invariante bildet, folgt ferner, wegen der Invarianz von γ_{00}, daß die vier Größen γ_{0i} sich invariantentheoretisch wie die elektromagnetischen Potentiale verhalten. In der Tat sind diese nur so weit bestimmt, daß die Größe $\varphi_i\,d x^i$ bis auf ein vollständiges Differential einer beliebigen Funktion von x^1, x^2, x^3, x^4 festgelegt ist. Sowohl die Festsetzungen $\gamma_{i0} = \beta\,\varphi_i$ wie $\gamma_{00} = 1$ sind also mit unserer Transformationsgruppe verträglich*. Da wir identisch schreiben können

$$d\sigma^2 = \sum \gamma_{ik}\,d x^i\,d x^k \equiv \frac{1}{\gamma_{00}}\left(\sum \gamma_{0k}\,d x^k\right)^2 + \left(\gamma_{ik} - \frac{\gamma_{i0}\,\gamma_{k0}}{\gamma_{00}}\right) d x^i\,d x^k,$$

so sehen wir auch auf Grund der Invarianz von γ_{00} und $\sum \gamma_{0k}\,d x^k$, daß $\left(\gamma_{ik} - \frac{\gamma_{i0}\,\gamma_{k0}}{\gamma_{00}}\right) d x^i\,d x^k$ eine Invariante bildet, was wiederum seine in (14) ausgedrückte Identifizierung mit dem Quadrat des Einsteinschen Linienelements rechtfertigt.

Betrachten wir noch einmal den Vektor $\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4$. Setzen wir

$$s^i = \sigma^i \quad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{21}$$

und drücken wir die kovarianten Komponenten s_1, s_2, s_3, s_4 des Vierervektors mit Hilfe der kovarianten Komponenten $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ des Fünfvektors aus. Man hat

$$s_i = g_{ik}\,s^k = g_{ik} \sum \gamma^{kr}\,\sigma_r = \sigma_i - \beta\,\varphi_i\,\sigma^0, \tag{22}$$

eine Formel, von der (12) ein Spezialfall ist. Setzen wir ferner bei einem symmetrischen Tensor

$$\Theta^{ik} = T^{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

und berechnen wir ebenso die Komponenten T_{ik}. Es gilt

$$\begin{aligned} T_{ik} = g_{i\mu}\,g_{k\nu}\,\Theta^{\mu\nu} &= g_{i\mu}\,g_{k\nu} \sum \gamma^{\mu r}\,\gamma^{\nu s}\,\Theta_{rs} \\ &= \Theta_{ik} - \beta\,(\varphi_i\,\Theta_{0k} + \varphi_k\,\Theta_{0i}) + \beta^2\,\varphi_i\,\varphi_k\,\Theta_{00}. \end{aligned} \tag{23}$$

Von dieser Formel ist wieder der aus (14) folgende Ausdruck für die g_{ik} ein Spezialfall.

---

* Wie man sieht, verlangt die im vorigen Paragraphen besprochene einfache Deutung der Bewegungsgleichungen, daß γ_{00} konstant ist. In § 4 werden wir einem Argument für das positive Zeichen von γ_{00} begegnen, d. h. für die Raumartigkeit der fünften Dimension. Die Annahme $\gamma_{00} = 1$ bedeutet dann nur, daß wir den Maßstab für x^0 in entsprechender Weise wie für die übrigen Dimensionen wählen. Auf die Frage der Konstanz von γ_{00} werden wir noch in § 4 zurückkehren.

Schließlich wollen wir die Determinante $\gamma = |\gamma_{ik}|$ der Größen γ_{ik} berechnen. Wir haben

$$\gamma^{-1} = \begin{vmatrix} 1+\beta^2\varphi_k\varphi^k, & -\beta\varphi^1, & -\beta\varphi^2, & -\beta\varphi^3, & -\beta\varphi^4 \\ -\beta\varphi^1 & g^{11} & g^{12} & g^{13} & g^{14} \\ -\beta\varphi^2 & g^{21} & g^{22} & g^{23} & g^{44} \\ -\beta\varphi^3 & g^{31} & g^{32} & g^{33} & g^{34} \\ -\beta\varphi^4 & g^{41} & g^{42} & g^{43} & g^{44} \end{vmatrix} = (1+\beta^2\varphi_k\varphi^k)\,g^{-1} - \beta^2\varphi^i\varphi^k g_{ik} g^{-1} = g^{-1},$$

wo g die Determinante der g_{ik} bezeichnet. Wir bekommen also einfach

$$\gamma = g. \tag{24}$$

§ 3. Das allgemeine Erhaltungsprinzip. Wir fangen damit an, einen einfachen mathematischen Hilfssatz abzuleiten. Durch eine infinitesimale Koordinatentransformation mögen die Koordinaten x^0, x^1, x^2, x^3, x^4 in $\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4$ verwandelt werden, wobei

$$\bar{x}^i = x^i + \varepsilon\,\xi^i(x^1, x^2, x^3, x^4) \qquad (i = 0, 1, 2, 3, 4). \tag{25}$$

Hier soll ε eine unendlich kleine Konstante bedeuten, während die ξ^i Funktionen der vier Koordinaten x^1, x^2, x^3, x^4 seien, die am Rande eines gewissen geschlossenen Gebietes G des fünfdimensionalen Raumes verschwinden sollen. Wir vergleichen die Werte der Größen g_{ik}, φ_i vor und nach der Transformation in zwei Punkten, wo die alten und neuen Koordinaten die gleichen Werte haben. Eine solche Variation bezeichnen wir mit δ^* †. Bedeutet a irgend eine der zu variierenden Größen, so hat man also

$$\delta^* a = \bar{a}(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4) - a(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4), \tag{26}$$

wo $\bar{a}$ die transformierte Größe a bedeutet.

Es seien nun Θ^{ik} die Komponenten eines symmetrischen fünfdimensionalen Tensors, die x^0 nicht enthalten sollen. Dann zeigt man leicht, daß

$$\sum \Theta^{ik}\delta\gamma_{ik} = \Theta^{ik}\delta g_{ik} + 2\beta\,\Theta_0^k\,\delta\varphi_k, \tag{27}$$

wo δ irgend eine beliebige infinitesimale Variation der durch (14) gegebenen Größen γ_{ik} bedeutet. Sei nun δ speziell die Variation δ^*, so folgt nach (25) und (26) durch eine leichte Rechnung

$$\tfrac{1}{2}\int\cdots\int\sqrt{-\gamma}\,dx^0\ldots dx^4\sum\Theta^{ik}\delta^*\gamma_{ik} = \varepsilon\int\cdots\int\sqrt{-\gamma}\,dx^0\ldots dx^4\sum \Delta\mathrm{iv}_i\,\Theta\,.\,\xi^i, \tag{28}$$

wo die Integration über das erwähnte Gebiet G zu erstrecken ist, und wo

$$\Delta\mathrm{iv}_i\,\Theta \equiv \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\sum\frac{\partial\sqrt{-\gamma}\,\Theta_i^k}{\partial x^k} - \frac{1}{2}\sum\frac{\partial\gamma_{rs}}{\partial x^i}\,\Theta^{rs}. \tag{29}$$

† Vgl. W. Pauli, Relativitätstheorie (Leipzig-Berlin 1921), S. 617.

Ebenso folgt, wenn wir den vierdimensionalen Tensor mit den Komponenten $T^{ik} = \Theta^{ik}$ $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ mit T bezeichnen,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\int\cdots\int \sqrt{-g}\, d x^0 \cdots d x^4\, T^{ik} \delta^* g_{ik} \\ = \varepsilon \int\cdots\int \sqrt{-g}\, d x^0 \cdots d x^4 \operatorname{Div}_i T \,.\, \xi^i, \end{aligned} \tag{30}$$

wo

$$\operatorname{Div}_i T \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}\, T_i^k}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i} T^{rs}. \tag{31}$$

Ferner findet man leicht

$$\begin{aligned} &\int\cdots\int \sqrt{-\gamma}\, d x^0 \cdots d x^4 \sum \Theta_0^i \delta^* \gamma_{0i} \\ &= \varepsilon\beta \int\cdots\int \sqrt{-\gamma}\, d x^0 \cdots d x^4 \left\{ \left(F_{ik} \Theta_0^i + \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\partial \sqrt{-\gamma}\, \Theta_0^i}{\partial x^i} \varphi_k \right) \xi^k \right. \\ &\left. + \frac{1}{\beta\sqrt{-\gamma}} \frac{\partial \sqrt{-\gamma}\, \Theta_0^i}{\partial x^i} \xi^0 \right\}, \end{aligned} \tag{32}$$

wo

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} \tag{33}$$

die Komponenten des elektromagnetischen Feldtensors bezeichnen. Da nun die ξ^i innerhalb des Gebietes G ganz beliebig gewählt werden können, folgt aus (22), da $\gamma = g$, identisch

$$\begin{aligned} \varDelta\mathrm{iv}_0 \Theta \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}\, \Theta_0^k}{\partial x^k}, \quad \varDelta\mathrm{iv}_i \Theta \equiv \operatorname{Div}_i T - \beta F_{ik} \Theta_0^k \\ + \frac{\beta}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}\, \Theta_0^k}{\partial x^k} \varphi_i \quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{aligned} \tag{34}$$

Wir geben nun dazu über, die Erhaltungssätze zu betrachten, wie sie in der Relativitätstheorie dargestellt werden. Es seien s^1, s^2, s^3, s^4 die Komponenten des Viererstroms; dann kann der Satz von der Erhaltung der Elektrizität bekanntlich durch folgende Gleichung ausgedrückt werden

$$\frac{\partial \sqrt{-g}\, s^k}{\partial x^k} = 0. \tag{35}$$

Wenn ferner T^{ik} $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ die Komponenten des Energie-Impulstensors der Materie vorstellen (das elektromagnetische Feld nicht mit einbegriffen), so kann das Energie-Impulsprinzip bekanntlich folgendermaßen ausgedrückt werden

$$\operatorname{Div}_i T = F_{ik} s^k \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{36}$$

Nach dem vorigen Paragraphen können wir aber einen fünfdimensionalen symmetrischen Tensor durch folgende Gleichungen definieren

$$\Theta^{ik} = T^{ik}, \ \Theta^k_0 = \frac{1}{\beta} s^k \quad (i, k = 1, 2, 3, 4), \tag{37}$$

wobei es auf den Wert von Θ_{00} nicht ankommt. Es folgt dann aus (34)

$$\Delta\mathrm{iv}_0 \Theta = \frac{1}{\beta\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}\, s^k}{\partial x^k}, \ \Delta\mathrm{iv}_i \Theta = \mathrm{Div}_i T - F_{ik} s^k$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}\, s^k}{\partial x^k} \varphi_i \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{38}$$

Die fünf Erhaltungssätze können folglich in die fünfdimensionale Divergenzbeziehung

$$\Delta\mathrm{iv}_i \Theta = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4) \tag{39}$$

zusammengefaßt werden, deren erste Gleichung die Erhaltung der Elektrizität ausspricht, während die vier übrigen das Energie-Impulsprinzip ausdrücken. Diese Gleichung bildet das fünfdimensionale Analogon zu dem Energie-Impulsprinzip der gewöhnlichen Relativitätstheorie bei Abwesenheit elektromagnetischer Felder.

Als Erläuterung dieser Beziehungen betrachten wir zuerst den Beitrag zum Energie-Impulstensor, den nach der gewöhnlichen Relativitätsmechanik ein Einzelteilchen von der Masse m liefert. Dieser ist $m u^i u^k$, wo u^i die Komponenten der Vierergeschwindigkeit darstellen. Hat das Teilchen eine Ladung e, so liefert es weiter einen Beitrag $\frac{e}{c} u^i$ zu dem Viererstrom. Einem solchen Teilchen können wir nun nach (37) einen fünfdimensionalen Tensor, wir wollen ihn mit ϑ^{ik} bezeichnen, zuordnen, indem wir setzen

$$\vartheta^{ik} = m u^i u^k, \ \vartheta^k_0 = \frac{e}{\beta c} u^k. \tag{40}$$

Bezeichnen wir nun die Fünfergeschwindigkeit mit v^0, v^1, v^2, v^3, v^4, wo (vgl. S. 194)

$$v^i = u^i \ (i = 1, 2, 3, 4), \ v_0 = \frac{p_0}{m} = \frac{e}{m\beta c}, \tag{41}$$

so können wir anstatt (40) schreiben

$$\vartheta^{ik} = m v^i v^k, \ \vartheta^k_0 = m v_0 v^k, \tag{42}$$

woraus die fünfdimensionale Tensorform unmittelbar hervorgeht.

Leiten wir demnächst das sogenannte wellenmechanische Energie-Impulsprinzip ab. Zu diesem Zwecke betrachten wir die folgende Invariante

$$M = \frac{h^2}{8\pi^2 m} \sum \gamma^{ik} \frac{\partial U}{\partial x^i} \frac{\partial U}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \lambda U^2, \tag{43}$$

wo h die Plancksche Konstante, m wieder die Masse des Teilchens, von dessen Wellengleichung die Rede ist, bedeuten, während

$$\lambda = m c^2 - \frac{e^2}{\beta^2 m c^2} \tag{44}$$

und U eine invariante Funktion von x^0, x^1, x^2, x^3, x^4 sein soll. Wir bilden die Variation $\delta(\sqrt{-\gamma} M)$, indem wir die Größen γ^{ik} und U variieren, und integrieren diese Größe über ein bestimmtes fünfdimensionales Gebiet, an dessen Rand die Variationen verschwinden mögen. Es folgt nach einer einfachen Rechnung

$$\int \cdots \int \delta(\sqrt{-\gamma} M)\, d x^0 \cdots d x^4 = \int \cdots \int \sqrt{-\gamma}\, d x^0 \cdots d x^4 \Big\{ \sum \Theta_{ik} \delta \gamma^{ik} + \Big(- \frac{h^2}{4\pi^2 m} \pentagon U + \lambda U \Big) \delta U \Big\}, \tag{45}$$

wo

$$\Theta_{ik} = \frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\partial U}{\partial x^i} \frac{\partial U}{\partial x^k} - \frac{1}{2} M \gamma_{ik} \quad (i, k = 0, 1, 2, 3, 4), \tag{46}$$

während $\pentagon$ die fünfdimensionale Verallgemeinerung des Laplaceschen Operators bedeutet, also

$$\pentagon U = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \sum \frac{\partial}{\partial x^i} \Big(\sqrt{-\gamma}\, \gamma^{ik} \frac{\partial U}{\partial x^k} \Big). \tag{47}$$

Lassen wir nun speziell unsere Variation die durch (26) ausgedrückte infinitesimale Änderung bedeuten. Dann haben wir nach (28)

$$\tfrac{1}{2} \int \cdots \int \sqrt{-\gamma}\, d x^0 \ldots d x^4\, \Sigma\, \Theta_{ik} \delta^* \gamma^{ik} = - \varepsilon \int \cdots \int \sqrt{-\gamma}\, d x^0 \ldots d x^4 \sum \Delta\mathrm{iv}_i \Theta \,.\, \xi^i \tag{28a}$$

und ferner, da

$$\overline{U}(\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4) = U(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4),$$

$$\delta^* U = - \varepsilon \sum \frac{\partial U}{\partial x^i} \xi^i, \tag{48}$$

so daß die rechte Seite von (45) die Form annimmt

$$-2\varepsilon \int \cdots \int \sqrt{-\gamma}\, d x^0 \ldots d x^4 \sum \xi^i \Big\{ \Delta\mathrm{iv}_i \Theta + \frac{1}{2} \Big(- \frac{h^2}{4\pi^2 m} \pentagon U + \lambda U \Big) \frac{\partial U}{\partial x^i} \Big\}.$$

Da aber $\int \ldots \int \sqrt{-\gamma}\, M\, d x^0 \ldots d x^4$ eine Invariante ist, so muß die Größe auf der linken Seite von (45) für beliebige ξ^i, die am Rande des Gebiets verschwinden, gleich Null sein*. Es folgen also die Identitäten

$$\varDelta \mathrm{iv}_i \Theta + \frac{1}{2}\left(-\frac{h^2}{4\pi^2 m} \pentagon U + \lambda U\right)\frac{\partial U}{\partial x^i} = 0. \tag{49}$$

In der fünfdimensionalen Schreibweise lautet aber die Wellengleichung für das elektrische Teilchen**

$$-\frac{h^2}{4\pi^2 m} \pentagon U + \lambda U = 0, \tag{50}$$

so daß folgt

$$\varDelta \mathrm{iv}_i \Theta = 0. \tag{51}$$

Diese Bezeichnungen drücken, wie wir zeigen wollen, das allgemeine wellenmechanische Erhaltungsprinzip aus. Wie aus (49) hervorgeht, ist dieses Prinzip nicht nur eine Folge der Wellengleichung (50), sondern die Wellengleichung folgt auch umgekehrt aus (51), so daß beide völlig äquivalent sind.

Wir setzen wieder $\Theta^{ik} = T^{ik}$ $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ und berechnen mit Hilfe von (23) die Komponenten T_{ik}. Es ergibt sich nach einer leichten Rechnung

$$T_{ik} = \frac{h^2}{8\pi^2 m}\left(\frac{\partial U}{\partial x^i} - \beta \varphi_i \frac{\partial U}{\partial x^0}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial x^k} - \beta \varphi_k \frac{\partial U}{\partial x^0}\right) - \frac{1}{2} M g_{ik} \; (i, k = 1, 2, 3, 4). \tag{52}$$

Setzen wir ferner $\Theta_0^k = \frac{1}{\beta} s^k$, so folgt nach (22)

$$s_i = \frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\partial U}{\partial x^0}\left(\frac{\partial U}{\partial x^i} - \beta \varphi_i \frac{\partial U}{\partial x^0}\right) \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{53}$$

Um zu der vierdimensionalen Form der Wellengleichung zu gelangen, müssen wir nun setzen

$$U = \varphi e^{\frac{2\pi i}{h} p_0 x^0} + \psi e^{-\frac{2\pi i}{h} p_0 x^0}, \tag{54}$$

* Vgl. W. Pauli, l. c.

** Diese Form der Wellengleichung hat zuerst de Broglie, l. c. vorgeschlagen. Wegen (54) ist sie der früher vom Verfasser (ZS. f. Phys. **37**, 895, 1926) und von Fock (ebenda **39**, 226, 1926) gegebenen Form äquivalent. Die von de Broglie geäußerte entgegengesetzte Ansicht beruht auf einer Verwechslung der auf S. 901 der Arbeit des Verfassers definierten Größen α_{ik} mit den metrischen Größen γ_{ik}. Doch sei betont, daß sich nur die Form (50) der Wellengleichung direkt an die in § 1 der vorliegenden Arbeit und S. 899 der früheren Arbeit gegebene Darstellung der Bewegungsgleichungen anschließt. Die Tatsache, daß sich der Grenzübergang zur klassischen Theorie mittels der älteren Form der Gleichung besonders einfach gestaltet, bietet — im Gegensatz zu meiner früheren Ansicht — jedoch kein Argument für diese Form der Gleichung dar, da die bezügliche Grenzbetrachtung wegen der Unteilbarkeit der elektrischen Ladung kaum als sinngemäß anzusehen ist.

wo φ und ψ zwei konjugiert komplexe nur von x^1, x^2, x^3, x^4 abhängige Funktionen bezeichnen. Durch Einführung dieses Ausdrucks in (52) und (53) zerfallen die Größen T_{ik} und s_i in drei Teile, einen von x^0 unabhängigen und zwei mit $e^{2\frac{2\pi i}{h} p_0 x^0}$ bzw. $e^{-2\frac{2\pi i}{h} p_0 x^0}$ proportionale Teile, die offensichtlich jeder für sich die Erhaltungsgleichungen (51) befriedigen müssen. Für den Gebrauch der Größen T_{ik} und S_i in der Quantentheorie kommen jedoch nur die von x^0 unabhängigen Teile in Betracht, die wir als Mittelwerte über x^0 mit $\overline{T}_{ik}$ bzw. $\overline{s}_i$ bezeichnen wollen. Es ergibt sich wegen $p_0 = \frac{e}{\beta c}$

$$\overline{T}_{ik} = \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\varphi_i\varphi\right)\left(-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi}{\partial x^k} - \frac{e}{c}\varphi_k\psi\right)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} - \frac{e}{c}\varphi_k\varphi\right)\left(-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\varphi_i\psi\right) - \frac{1}{2}\overline{M} g_{ik},\right\} \quad (55)$$

wo

$$\overline{M} = \frac{1}{m} g^{ik}\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\varphi_i\varphi\right)\left(-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi}{\partial x^k} - \frac{e}{c}\varphi_k\psi\right) + m c^2 \varphi\psi. \quad (56)$$

Weiter folgt

$$s_i = \frac{e}{2mc}\left\{\frac{h}{2\pi i}\left(\psi\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - \varphi\frac{\partial \psi}{\partial x^i}\right) - 2\frac{e}{c}\varphi_i\varphi\psi\right\} \quad (57)$$

in Übereinstimmung mit zuerst von Schrödinger und Gordon gegebenen Ausdrücken für den Energie-Impulstensor und den Viererstrom. Auf Grund von (51) und (34) müssen die Ausdrücke (55) und (57) tatsächlich den Erhaltungssätzen genügen.

§ 4. Die Feldgleichungen. Wir wollen jetzt von unserem Gesichtspunkt aus die Feldgleichungen der Relativitätstheorie betrachten. Es seien R_{ik} die Komponenten des verjüngten Krümmungstensors, also

$$R_{ik} \equiv \frac{\partial \Gamma^\alpha_{i\alpha}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{ik}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\beta_{i\alpha}\Gamma^\alpha_{k\beta} - \Gamma^\alpha_{ik}\Gamma^\beta_{\alpha\beta} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4), \quad (58)$$

wo

$$\Gamma^i_{rs} \equiv \frac{1}{2} g^{ik}\left(\frac{\partial g_{kr}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^k}\right) \quad (i, r, s = 1, 2, 3, 4) \quad (59)$$

die wohlbekannten Dreiindizessymbole bezeichnen. Es sei ferner

$$G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R, \quad (60)$$

wo

$$R \equiv g^{ik} R_{ik} \quad (61)$$

die Krümmungsinvariante bedeutet. Mit diesen Bezeichnungen lauten bekanntlich die Einsteinschen Feldgleichungen für das Gravitationsfeld

$$G^{ik} = -\varkappa\,(T^{ik} + S^{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4), \tag{62}$$

wo wir aus später ersichtlichen Gründen die kontravarianten Komponenten gewählt haben. Hier sind S^{ik} die kontravarianten Komponenten des Energie-Impulstensors des elektromagnetischen Feldes, dessen kovariante Komponenten lauten

$$S_{ik} \equiv F_{ri}\,F_{sk}\,g^{rs} - \frac{1}{4}\,F_{rs}\,F^{rs}\,g_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4), \tag{63}$$

während $\varkappa$ die Einsteinsche Gravitationskonstante bedeutet.

Ferner lautet die Einsteinsche Verallgemeinerung der Maxwellschen Gleichungen für das elektromagnetische Feld

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial \sqrt{-g}\,F^{ik}}{\partial x^k} = s^i \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{64}$$

Bekanntlich gilt nun identisch

$$\mathrm{Div}_i\, G \equiv 0, \quad \frac{\partial \sqrt{-g}\,s^k}{\partial x^k} \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{65}$$

wo wir einen Augenblick s^i als Abkürzung des Ausdrucks auf der linken Seite von (64) gebraucht haben. Ferner hat man

$$\mathrm{Div}_i\, S \equiv -F_{ik}\,s^k \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4), \tag{66}$$

wo wiederum s^k als Abkürzung für $\dfrac{1}{\sqrt{-g}}\,\dfrac{\partial \sqrt{-g}\,F^{ik}}{\partial x^k}$ steht. Diese Identitäten führen auf Grund der Feldgleichungen (62) und (64) in wohlbekannter Weise zu den Erhaltungssätzen für elektrische Ladung, Energie und Impuls.

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir den fünfdimensionalen Tensor Γ^{ik}, der das genaue Analogon zu dem vierdimensionalen Tensor G^{ik} ist. Er hängt nach (14) von den g_{ik}, den φ_i und deren ersten und zweiten Differentialquotienten nach x^1, x^2, x^3, x^4 ab. Ferner erfüllt er die Identitäten

$$\varDelta\mathrm{iv}_i\, \Gamma \equiv 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3, 4), \tag{67}$$

wofür wir nach (34) auch schreiben können

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial \sqrt{-g}\,\Gamma_0^k}{\partial x^k} \equiv 0, \quad \mathrm{Div}_i\,\overline{G} - \beta\,F_{ik}\,\Gamma_0^k \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{68}$$

wo $\overline{G}$ einen vierdimensionalen Tensor mit den Komponenten Γ^{ik} ($i, k = 1, 2, 3, 4$) bezeichnet. Nach § 2 müssen ja diese Γ^{ik} der Gruppe (A) gegenüber einen symmetrischen vierdimensionalen Tensor bilden.

Betrachten wir zuerst die Komponenten Γ_0^k, die nach § 2 der Gruppe (A) gegenüber einen Vierervektor bilden, dessen Divergenz nach (68) identisch verschwindet. Aus den Größen g_{ik}, φ_i selbst und ihren ersten Differentialquotienten läßt sich, wie man leicht sieht, keine Größe bilden, die (A) gegenüber sich wie ein Vierervektor verhält. (Die φ_i bilden ja nur dann einen Vierervektor, wenn x^0 untransformiert bleibt.) Die einzigen unabhängigen Tensoren zweiten Ranges, die aus diesen Größen gebildet werden können, sind ferner g_{ik} und F_{ik}. Wenn wir noch die zweiten Differentialquotienten der g_{ik} und φ_i hinzunehmen, und zwar linear, so bekommen wir als einzigen Vierervektor const $\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}\, F^{ik}}{\partial x^k}$, dessen Divergenz wirklich identisch verschwindet. Von dieser Form muß also Γ_0^i sein. Den konstanten Faktor können wir bestimmen, indem wir z. B. in dem allgemeinen Ausdruck für Γ_0^i alle Größen g_{ik} und drei der Größen φ_i als konstant annehmen. Es folgt dann

$$\Gamma_0^i = -\frac{1}{2}\beta \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}\, F^{ik}}{\partial x^k} \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{69}$$

Aus (68) und (66) folgt nun

$$\mathrm{Div}_i\, G \equiv \frac{1}{2} \beta^2\, \mathrm{Div}_i\, S \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{70}$$

Es muß also $\overline{G}_{ik} - \frac{1}{2}\beta^2 S_{ik}$ ein Tensor mit identisch verschwindender Divergenz sein. Die einzigen unabhängigen aus den g_{ik}, φ_i und deren ersten und zweiten Differentialquotienten zu bildenden Größen, die sich (A) gegenüber wie symmetrische Tensoren zweiten Ranges verhalten und außerdem linear sind in den zweiten Differentialquotienten, sind aber neben den schon genannten (g_{ik}, F_{ik}) nur G_{ik}, $R g_{ik}$, S_{ik} und $F_{rs} F^{rs} g_{ik}$. Verlangen wir noch, daß die Divergenz des Tensors identisch verschwinden soll, so bleibt als einzige Möglichkeit übrig const G_{ik} + const g_{ik}. Da nun durch Nullsetzen der φ_i, wie leicht zu zeigen ist, die Γ^{ik} einfach in die G^{ik} übergehen, so muß also gelten

$$\Gamma^{ik} = G^{ik} + \frac{1}{2}\beta^2 S^{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4). \tag{71}$$

Wir wollen nun die Annahme machen, daß die noch unbestimmte Konstante β folgendermaßen mit der Einsteinschen Gravitationskonstante $\varkappa$ zusammenhängt*

$$\beta = \sqrt{2\varkappa}. \tag{72}$$

Wir können dann zufolge (37) den Feldgleichungen der Relativitätstheorie die folgende einfache Form geben

$$\Gamma^{ik} = -\varkappa\Theta^{ik},\ \Gamma_0^k = -\varkappa\Theta_0^k \quad (i, k = 1, 2, 3, 4), \tag{73}$$

wo Θ den fünfdimensionalen Impulsenergie-Elektrizitätstensor bedeutet.

Da es nicht notwendig ist, die Größe Θ_{00} festzulegen, können wir diesen Gleichungen eine noch symmetrischere Form geben, wenn wir als Definition von Θ_{00} noch die folgende Gleichung hinzufügen

$$\Gamma_{00} = -\varkappa\Theta_{00}. \tag{74}$$

Durch eine einfache Rechnung folgt hieraus

$$\Theta_{00} = \frac{1}{2} g_{ik}\Theta^{ik} + \frac{3}{4} F_{ik}F^{ik}, \tag{75}$$

und wir können für die Feldgleichungen schreiben

$$\Gamma_{ik} = -\varkappa\Theta_{ik} \quad (i, k = 0, 1, 2, 3, 4), \tag{76}$$

welches außer (75) eben 14 Bestimmungsgleichungen für die g_{ik} und φ_i ergibt.

Eine andere Weise, dem Fehlen einer fünfzehnten Feldgleichung Rechnung zu tragen, ergibt sich, wenn wir die Variation des Integrals $\int \ldots \int \sqrt{-\gamma}\, P\, dx^0 \ldots dx^4$ betrachten, das über ein geschlossenes fünfdimensionales Gebiet G zu erstrecken ist, und wo P die fünfdimensionale Krümmungsinvariante bedeutet. Man hat nach bekannten Formeln, wenn die γ_{ik} variiert und am Rande des Gebiets festgehalten werden,

$$\delta \int \ldots \int \sqrt{-\gamma}\, P\, dx^0 \ldots dx^4 = -\int \ldots \int \sqrt{-\gamma}\, dx^0 \ldots dx^4 \sum \Gamma^{ik}\,\delta\gamma_{ik}. \tag{77}$$

Geben wir nun von vornherein den γ_{ik} die Werte (14), so daß γ_{00} unvariiert bleibt, so folgt auf Grund von (27)

$$\begin{aligned}\delta \int \ldots \int \sqrt{-\gamma}\, P\, dx^0 \ldots dx^4 \\ = -\int \ldots \int \sqrt{-\gamma}\, dx^0 \ldots dx^4 \{\Gamma^{ik}\,\delta g_{ik} + 2\beta\,\Gamma_0^k\,\delta\varphi_k\}.\end{aligned} \tag{78}$$

In derselben Weise folgt

$$\begin{aligned}\int \ldots \int \sqrt{-\gamma}\, dx^4 \ldots dx^4 \sum \Theta^{ik}\,\delta\gamma_{ik} \\ = -\int \ldots \int \sqrt{-\gamma}\, dx^0 \ldots dx^4 \{\Theta^{ik}\,\delta g_{ik} + 2\beta\,\Theta_0^k\,\delta\varphi_k\}.\end{aligned} \tag{79}$$

* Hätten wir die fünfte Dimension als zeitartig betrachtet, so hätte das Glied $\frac{1}{2}\beta^2 S^{ik}$ das umgekehrte Zeichen bekommen, was als Argument für die Raumartigkeit der fünften Dimension zu betrachten ist.

Wenn C den nicht zu variierenden Wert von $\sum \gamma_{ik}\Theta^{ik}$ bedeutet, so wird der Ausdruck linker Hand in der letzten Gleichung offenbar gleich*

$$\delta \int \ldots \int \sqrt{-\gamma}\, d x^0 \ldots d x^4 \left\{\sum \gamma_{ik}\Theta^{ik} - C\right\},$$

wo die γ_{ik} zu variieren sind, so daß wir die Feldgleichungen (73) zusammenfassen können durch das Variationsprinzip

$$\delta \int \ldots \int \sqrt{-\gamma}\, d x^0 \ldots d x^4 \left\{P - \varkappa\left(\sum \gamma_{ik}\Theta^{ik} - C\right)\right\}\cdot \qquad (80)$$

In ähnlicher Weise können die aus den wellenmechanischen Ansätzen (46) für den Tensor Θ^{ik} fließenden Feldgleichungen nach (45) durch das folgende Variationsprinzip dargestellt werden

$$\delta \int \ldots \int \sqrt{-\gamma}\, d x^0 \ldots d x^4 \,(P + \varkappa M) = 0, \qquad (81)$$

wo die Variation nach U noch zu der Wellengleichung (50) führt.

Ein anderer naheliegender Ausweg, um die volle fünfdimensionale Symmetrie der Feldgleichungen herbeizuführen, ist, die Annahme $\gamma_{00} = 1$ fallen zu lassen. In der Tat möchte man versucht sein die fünfzehnte Größe γ_{00} in Verbindung zu bringen mit der die Materie charakterisierenden Wellenfunktion U, um so eine formale Vereinigung von Materie und Feld zu erreichen. Da ein Versuch in dieser Richtung keine sehr versprechenden Resultate ergeben hat, wollen wir uns hier damit begnügen die Ergebnisse der Rechnung kurz mitzuteilen.

Anstatt der vorhin benutzten γ_{ik} führen wir andere Größen $\bar{\gamma}_{ik}$ ein, die folgendermaßen mit den alten Größen zusammenhängen

$$\bar{\gamma}_{ik} = e^{\Lambda}\gamma_{ik} \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3, 4), \qquad (82)$$

wo Λ irgend eine Funktion von x^0, x^1, x^2, x^3, x^4 bedeutet. Die zu den $\bar{\gamma}_{ik}$ gehörige Krümmungsinvariante sei mit $\bar{P}$ bezeichnet. Dann ergibt sich

$$\bar{P} = e^{-\Lambda}\left\{P + 4 \bigcirc \Lambda + 3 \sum \gamma^{ik} \frac{\partial \Lambda}{\partial x^i}\frac{\partial \Lambda}{\partial x^k}\right\}. \qquad (83)$$

Die zugehörigen Größen $\bar{\Gamma}^{ik}$ können wir aus der Variationsformel

$$\delta \int \ldots \int \sqrt{-\bar{\gamma}}\, d x^0 \ldots d x^4\, \bar{P} = -\int \ldots \int \sqrt{-\bar{\gamma}}\, d x^0 \ldots d x^4 \sum \bar{\Gamma}^{ik}\,\delta\bar{\gamma}_{ik}$$

ableiten. Eine einfache Rechnung zeigt nun, daß

$$\int \ldots \int \sqrt{-\bar{\gamma}}\, d x^0 \ldots d x^4\, \bar{P}$$

$$= \int \ldots \int \sqrt{-\gamma}\, d x^0 \ldots d x^4 \left\{\Phi^2 P - \frac{16}{3}\sum \gamma^{\mu\nu}\frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}\frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu}\right\}, \qquad (84)$$

wo

$$\Phi = e^{3/4\,\Lambda} = (\bar{\gamma}_{00})^{3/4}. \qquad (85)$$

* In dem früher vom Verfasser, l. c., S. 898 gegebenen Ausdruck fehlt die Größe C.

Wenn wir diese Formel mit (81) vergleichen, so scheint im ersten Augenblick mit Rücksicht auf (43) eine Ähnlichkeit zu bestehen. Eine nähere Betrachtung zeigt jedoch, daß diese Ähnlichkeit illusorisch ist, was besonders durch den Zeichenunterschied zum Vorschein kommt.

Solange wir uns überhaupt an die klassischen Theorien halten, dürfte die obige Darstellung mit der Annahme $\gamma_{00} = 1$, die in sich geschlossen ist und zu den Gesetzen der gewöhnlichen Relativitätstheorie führt, die befriedigenste sein. Eine allgemeinere Verwertung der fünfdimensionalen Feldgleichungen kann man wohl erst durch die Einführung der Quantentheorie erwarten, wobei auch die Annahme, daß die γ_{ik} von x^0 unabhängig sind, durch eine rationellere zu ersetzen sein wird*.

---

* Die Existenz des elektrischen Elementarquantums legt in der Tat die Annahme nahe, daß die γ_{ik} — wenn wir von der Einführung der Quantentheorie in die raum—zeitlichen Relationen vorläufig absehen — als Matrizen von der Form

$$\begin{pmatrix} \alpha_{ik}, & \beta_{ik}\, e^{\frac{2\pi i}{h} p_0 x^0} \\ \beta^*_{ik}\, e^{-\frac{2\pi i}{h} p_0 x^0} & \alpha^*_{ik} \end{pmatrix}$$

zu betrachten sind, wo α_{ik} und α^*_{ik}, β_{ik} und β^*_{ik} konjugiert komplex sind, eine Form, die sowohl bei Additionen wie auch bei Multiplikationen nach den Matrizenrechenregeln erhalten bleibt. Es liegt hier ein Fall vor, der eine gewisse Ähnlichkeit aufzuweisen scheint mit der von Pauli und Jordan gegebenen Behandlung des rotierenden Elektrons. London (Naturwiss. **15**, 5, 1927) hat auf die Möglichkeit hingewiesen, x^0 als Drehwinkel des Elektrons um seine Achse zu betrachten. Doch dürfte dies kaum zutreffend sein, da nach der Definition von x^0 die zu ihr konjugierte Größe die elektrische Ladung und nicht der Drehimpuls des Elektrons ist. Es scheint jedoch ein innerer Zusammenhang zu bestehen zwischen der eben vorgeschlagenen Einführung der fünften Dimension und der von Jordan in Analogie zu der Theorie des rotierenden Elektrons gegebenen Darstellung der antisymmetrischen Lösung der Koordinatenraumgleichung, worauf ich demnächst zurückzukommen hoffe.