Edition Open Sources
Sources 10

Alexander S. Blum and Dean Rickles:

Vladimir Fock (1929): Geometrisierung der Diracschen Theorie des Elektrons

DOI: 10.34663/9783945561317-13

In: Alexander S. Blum and Dean Rickles (eds.): *Quantum Gravity in the First Half of the Twentieth Century : A Sourcebook*
Online version at https://edition-open-sources.org/sources/10/

ISBN 978-3-945561-31-7, DOI 10.34663/9783945561317-00
First published 2018 by Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften, Edition Open Sources under Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany Licence.
https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/

The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at http://dnb.d-nb.de

Chapter 11
Vladimir Fock (1929): Geometrisierung der Diracschen Theorie des Elektrons

Vladimir Fock (1929), Geometrisierung der Diracschen Theorie des Elektrons. *Zeitschrift für Physik*, 57: 261–277.

Geometrisierung der Diracschen Theorie des Elektrons.

Von **V. Fock** in Leningrad.

(Eingegangen am 5. Juli 1929.)

Mit Hilfe des Begriffs der Parallelübertragung eines Halbvektors werden die Diracschen Gleichungen in allgemein invarianter Form geschrieben. Es werden der Energietensor gebildet und die makroskopischen sowie die quantenmechanischen Bewegungsgleichungen aufgestellt. Die ersteren haben die gewöhnliche Form: Divergenz des Energietensors gleich der Lorentzkraft, und die letzteren sind im wesentlichen mit denen der geodätischen Linie identisch. Das Auftreten des Viererpotentials φ_l neben den Riccikoeffizienten γ_{ikl} in der Formel für die Parallelübertragung gibt einerseits einen einfachen geometrischen Grund für das Auftreten des Ausdrucks $p_l - \frac{e}{c}\varphi_l$ in der Wellengleichung und zeigt andererseits, daß die Potentiale φ_l, abweichend von Einsteins Auffassung, einen selbständigen Platz im geometrischen Weltbild haben und nicht etwa Funktionen der γ_{ikl} sein müssen.

In einer Arbeit von D. Iwanenko und dem Verfasser* wurde die Vermutung ausgesprochen, daß die Diracschen Matrizen eine rein geometrische Bedeutung haben. In einer anderen Arbeit** dieser Autoren wurde der Begriff der Parallelverschiebung eines Halbvektors (d. h. eines Quadrupels von Größen, die sich wie die Diracschen ψ-Funktionen transformieren) aufgestellt.

In einer weiteren Notiz*** hat ferner der Verfasser diesen Begriff zur Aufstellung der allgemein-relativistischen Wellengleichung des Elektrons angewandt und die makroskopischen Bewegungsgleichungen in der Einsteinschen Form abgeleitet.

Die vorliegende Arbeit ist eine vervollständigte Wiedergabe der in der letztgenannten Notiz gegebenen Betrachtungen.

1. Die Transformationseigenschaften der Diracschen ψ-Funktionen wurden eingehend von F. Möglich**** und J. v. Neumann† studiert.

---

* V. Fock und D. Iwanenko, Über eine mögliche geometrische Deutung der relativistischen Quantentheorie. ZS. f. Phys. **54**, 798, 1929.

** Dieselben, Géométrie quantique linéaire et déplacement parallèle. C. R. **188**, 1470, 1929. Diese Arbeit wurde am 20. Mai 1929 in der physikalischen Konferenz in Charkow vorgetragen.

*** V. Fock, Sur les équations de Dirac dans la théorie de relativité générale. C. R. **189**, 25, 1929.

**** F. Möglich, Zur Quantentheorie des rotierenden Elektrons. ZS. f. Phys. **48**, 852, 1928.

† J. v. Neumann, Einige Bemerkungen zur Diracschen Theorie des relativistischen Drehelektrons. Ebenda S. 868.

Eine besonders einfache Form erhält das Transformationsgesetz, wenn man für die ersten drei der Diracschen α-Matrizen die Ausdrücke

$$\alpha_1 = \sigma_1, \quad \alpha_2 = \varrho_3 \sigma_2, \quad \alpha_3 = \sigma_3 \tag{1}$$

und als vierte Matrix eine der Matrizen

$$\alpha_4 = \varrho_2 \sigma_2, \quad \alpha_5 = \varrho_1 \sigma_2 \tag{1*}$$

wählt †, wo $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ die von Dirac eingeführten vierreihigen Matrizen sind.

Dann entspricht nämlich einer allgemeinen Lorentztransformation die folgende Transformation der ψ-Funktionen:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1' &= \alpha\psi_1 + \beta\psi_2; & \psi_3' &= \bar{\alpha}\psi_3 + \bar{\beta}\psi_4, \\ \psi_2' &= \gamma\psi_1 + \delta\psi_2; & \psi_4' &= \bar{\gamma}\psi_3 + \bar{\delta}\psi_4. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die komplexen Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ genügen der Bedingung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{3}$$

und gehen im Falle einer rein räumlichen Drehung in die gewöhnlichen Parameter von Cayley und Klein über.

Bezeichnet man mit α_0 die Einheitsmatrix, so bilden die Größen

$$A_i = \bar{\psi}\alpha_i\psi \quad (i = 0, 1, 2, 3) \tag{4}$$

die Komponenten eines Vierervektors, und die Größen

$$A_4 = \bar{\psi}\alpha_4\psi, \quad A_5 = \bar{\psi}\alpha_5\psi \tag{4*}$$

sind Invarianten. Diese Tatsache läßt sich in Formeln wie folgt ausdrücken. Bezeichnet man die Transformation (2) mit S:

$$\psi' = S\psi, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi}S^+, \tag{5}$$

wo S^+ die zu S adjungierte (transponiert-konjugierte) Matrix bezeichnet, so gelten die Gleichungen:

$$S^+\alpha_i S = \sum_{k=0}^{3} a_{ik}\alpha_k; \quad S^+\alpha_4 S = \alpha_4; \quad S^+\alpha_5 S = \alpha_5, \tag{6}$$

wo a_{ik} die Koeffizienten einer allgemeinen Lorentztransformation sind. Wegen

$$\bar{\psi}'\alpha_i\psi' = \bar{\psi}S^+\alpha_i S\psi$$

transformieren sich daher die Größen (4) und (4*) nach den Formeln

$$A_i' = \sum_{k=0}^{3} a_{ik}A_k; \quad A_4' = A_4; \quad A_5' = A_5, \tag{7}$$

d. h. wie ein Vierervektor bzw. wie Invarianten. Da die in den ψ quadratischen Größen A_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ einen Vierervektor bilden, wollen wir die Größen ψ mit den Transformationseigenschaften (2) als „Halbvektor" bezeichnen ††.

† Siehe V. Fock, Über den Begriff der Geschwindigkeit in der Diracschen Theorie des Elektrons. Anhang. Ebenda **55**, 127, 1929.

†† Diese Bezeichnung wurde von Herrn L. Landau eingeführt.

Die expliziten Ausdrücke für die Größen A_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ lauten:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \bar\psi_1\psi_1 + \bar\psi_2\psi_2 + \bar\psi_3\psi_3 + \bar\psi_4\psi_4, \\
A_1 &= \bar\psi_1\psi_2 + \bar\psi_2\psi_1 + \bar\psi_3\psi_4 + \bar\psi_4\psi_3, \\
A_2 &= -i\bar\psi_1\psi_2 + i\bar\psi_2\psi_1 + i\bar\psi_3\psi_4 - i\bar\psi_4\psi_3, \\
A_3 &= \bar\psi_1\psi_1 - \bar\psi_2\psi_2 + \bar\psi_3\psi_3 - \bar\psi_4\psi_4, \\
A_4 &= -\bar\psi_1\psi_4 + \bar\psi_2\psi_3 + \bar\psi_3\psi_2 - \bar\psi_4\psi_1, \\
A_5 &= -i\bar\psi_1\psi_4 + i\bar\psi_2\psi_3 - i\bar\psi_3\psi_2 + i\bar\psi_4\psi_1.
\end{aligned}$$

An der Hand dieser Ausdrücke bestätigt man die folgende identische Beziehung zwischen den Größen A_i:

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + A_5^2 = A_0^2. \tag{8}$$

2. Wir haben die Transformationseigenschaften der ψ-Funktionen bei einer Lorentztransformation im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie betrachtet. Stellen wir uns auf den Standpunkt der allgemeinen Relativitätstheorie, so müssen wir, um den Begriff des Halbvektors einführen zu können, in jedem Raumzeitpunkt ein orthogonales (genauer pseudoorthogonales) Bezugssystem haben. Zu diesem Zwecke führen wir ein Netz von vier orthogonalen Kurvenkongruenzen ein und bezeichnen nach Einstein die Richtungen dieser Kongruenzen als „Beine". Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen bleiben dann auch für den Fall der allgemeinen Relativitätstheorie gültig, wenn wir unter A_i die Komponenten eines Vektors nach den Beinen verstehen.

Wir numerieren die Beine mit lateinischen und die Koordinaten mit griechischen Indizes, die überall die Werte 0, 1, 2, 3 durchlaufen; bei der Summierung nach den lateinischen Indizes wird das Summenzeichen explizite angegeben, bei der Summierung nach den griechischen Indizes dagegen unterdrückt. Die Parameter der Kurvenkongruenzen bezeichnen wir mit h_k^α und die Momente mit $h_{k,\alpha}$. Da wir es mit einer indefiniten Metrik zu tun haben, führen wir mit Eisenhart* die Größen $e_1 = e_2 = e_3 = -1$; $e_0 = +1$ ein. Die Komponenten eines Vektors nach den Koordinatenrichtungen (A_σ) und nach den Beinen (A'_k)** drücken sich dann die einen durch die anderen wie folgt aus:

$$A'_k = A_\sigma h_k^\sigma; \qquad A_\sigma = \sum_k e_k A'_k h_{k,\sigma}. \tag{9}$$

* L. Eisenhart, Riemannian Geometry. Princeton 1926. — Siehe auch die vortreffliche Zusammenstellung der wichtigsten Formeln und Tatsachen in der Arbeit von T. Levi-Civita, „Vereinfachte Herstellung der Einsteinschen einheitlichen Feldgleichungen". Berl. Ber. 1929, S. 3.

** Die Bein- und die Koordinatenkomponenten werden im folgenden öfters mit einem und demselben Buchstaben bezeichnet; um Verwechslungen zu vermeiden, werden dabei die ersteren mit einem Strich versehen.

Bezeichnen wir mit ds_k die Beinkomponenten einer infinitesimalen Verschiebung, so folgt aus der Formel

$$\delta A_\alpha = \Gamma^\beta_{\alpha\sigma} A_\beta \, dx^\sigma; \qquad \Gamma^\beta_{\alpha\sigma} = \left\{ {\alpha\sigma \atop \beta} \right\} \tag{10}$$

für die Änderung der Komponenten eines Vektors bei einer Parallelverschiebung der folgende Ausdruck für die Änderung seiner Beinkomponenten:

$$\delta A'_i = \sum_{kl} e_k e_l \gamma_{ikl} A'_k \, ds_l, \tag{11}$$

wo γ_{ikl} die von Ricci eingeführten Rotationskoeffizienten sind:

$$\gamma_{ikl} = (\nabla_\sigma h^\beta_i) h_{k,\beta} h^\sigma_l = (\nabla_\sigma h_{i,\beta}) h^\beta_k h^\sigma_l. \tag{12}$$

Dabei bezeichnet ∇_σ die kovariante Ableitung nach x^σ.

3. Wir wollen nun die Änderung der Komponenten eines Halbvektors ψ bei einer infinitesimalen Parallelverschiebung betrachten. Für diese Änderung machen wir den Ansatz

$$\delta \psi = \sum_l e_l C_l \, ds_l \, \psi. \tag{13}$$

Die C_l sind Matrizen mit den Elementen $(C_l)_{mn}$, und unter $C_l \psi$ verstehen wir vier Funktionen, deren m-te durch die Formel

$$(C_l \psi)_m = \sum_{n=1}^{4} (C_l)_{mn} \psi_n$$

gegeben wird.

Die zu (13) konjugiert-komplexe Gleichung lautet:

$$\delta \overline{\psi} = \overline{\psi} \sum_l e_l C^+_l \, ds_l, \tag{13*}$$

wo C^+_l die adjungierte Matrix bezeichnet. Nun ist durch das Gesetz (13) der Parallelverschiebung eines Halbvektors dasjenige eines Vektors bereits bestimmt; wir müssen nämlich haben:

$$\begin{aligned} \delta A'_i = \delta(\overline{\psi} \alpha_i \psi) &= \delta \overline{\psi} \alpha_i \psi + \overline{\psi} \alpha_i \delta \psi \\ &= \overline{\psi} \sum_l e_l (C^+_l \alpha_i + \alpha_i C_l) \, ds_l \, \psi. \end{aligned} \tag{14}$$

Soll diese Änderung mit der durch (11) gegebenen übereinstimmen, so müssen die C_l den Bedingungen

$$C^+_l \alpha_i + \alpha_i C_l = \sum_k e_k \alpha_k \gamma_{ikl} \tag{15}$$

genügen. Da ferner $A'_4 = \overline{\psi} \alpha_4 \psi$ und $A'_5 = \overline{\psi} \alpha_5 \psi$ Invarianten sind, so muß

$$\delta A'_4 = \overline{\psi} \sum_l e_l (C^+_l \alpha_4 + \alpha_4 C_l) \, ds_l \, \psi \tag{16}$$

und ebenso $\delta A'_5$ verschwinden, woraus die weiteren Bedingungen

$$C^+_l \alpha_4 + \alpha_4 C_l = 0; \qquad C^+_l \alpha_5 + \alpha_5 C_l = 0 \tag{17}$$

folgen.

Man überzeugt sich unmittelbar, daß die allgemeine Lösung der Gleichungen (15) und (17) durch die Formel

$$C_l = \tfrac{1}{4} \sum_{mk} \alpha_m \alpha_k e_k \gamma_{mkl} + i\,\Phi_l' \tag{18}$$

gegeben wird, wo Φ_l' hermitische Matrizen sind, die mit allen α_i, sowie mit α_4 und α_5 vertauschbar sein müssen. Bleibt man im Gebiet der vierreihigen Matrizen, so folgt aus der Vertauschbarkeit mit allen α-Matrizen die Proportionalität mit der Einheitsmatrix. Betrachtet man dagegen Matrizen mit mehr als vier Reihen*, so ist der Fall nicht ausgeschlossen, daß die Φ_l' nicht der Einheitsmatrix proportional sind. Wir wollen bei den vierreihigen Matrizen bleiben und die Φ_l' als reelle Zahlen betrachten.

Zu beachten ist, daß die C_l die Matrizen α_4 und α_5 nicht enthalten, so daß sie die ersten zwei ψ-Funktionen unter sich und die letzten zwei unter sich transformieren. Wegen der Formeln (2) war das auch a priori zu erwarten.

4. Nachdem wir den Begriff der Parallelverschiebung eines Halbvektors aufgestellt haben, können wir denjenigen der kovarianten Ableitung $D_l'\psi$ eines Halbvektors ψ nach der Beinrichtung l durch die Formel

$$D_l'\psi = \frac{\partial \psi}{\partial s_l} - C_l\psi \tag{19}$$

definieren, wo $\frac{\partial \psi}{\partial s_l} = h_l^\sigma \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x^\sigma}$ die Ableitung nach der Richtung des l-ten Beines bezeichnet. Die kovariante Ableitung eines Halbvektors nach der Koordinate x^σ bezeichnen wir mit

$$D_\sigma\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x^\sigma} - \Gamma_\sigma\psi, \tag{19*}$$

wo zur Abkürzung

$$\Gamma_\sigma = \sum_k e_k h_{k,\sigma} C_k \tag{20}$$

gesetzt ist.

Betrachtet man für einen Augenblick den Raum als pseudoeuklidisch und setzt man γ_{ikl} gleich Null, so wird der Ausdruck (20) für D_l' gleich

$$D_l'\psi = \frac{\partial \psi}{\partial s_l} - i\,\Phi_l'\psi.$$

Das ist aber gerade der Ausdruck, der in der Diracschen Gleichung vorkommt, wenn man unter Φ_l' die Größe

$$\Phi_l' = \frac{2\pi e}{hc}\varphi_l' \tag{21}$$

* Solche Matrizen könnten vielleicht bei gewissen Verallgemeinerungen der Diracschen Gleichung, z. B. auf das Zweikörperproblem, vorkommen.

versteht, wo φ_l' die Beinkomponente des Vektorpotentials bezeichnet. Wir wollen im folgenden an dieser physikalischen Interpretation der geometrischen Größen Φ_l' festhalten. Wir haben somit für das Auftreten des Vektorpotentials in der Diracschen Gleichung eine geometrische Deutung gewonnen; und zwar ist diese Deutung derart, daß das Potential auch dann von Null verschieden sein kann, wenn die die Größen γ_{ikl} enthaltenden Gravitationsglieder verschwinden.

Wenden wir uns nun der Formel (13) für $\delta\psi$ zu, so sehen wir, daß dort gerade die Weylsche lineare Differentialform

$$\sum_l e_l \varphi_l' d s_l = \varphi_\sigma d x^\sigma$$

auftritt, in Übereinstimmung mit der von Weyl ausgesprochenen Vermutung*. Das Auftreten der Weylschen Differentialform im Gesetz der Parallelverschiebung eines Halbvektors steht in enger Beziehung mit der vom Verfasser** und auch von Weyl (l. c.) bemerkten Tatsache, daß die Addition eines Gradienten zum Viererpotential der Multiplikation der ψ-Funktion mit einem Faktor vom absoluten Betrag 1 entspricht. Diese Tatsache wurde von Weyl als „Prinzip der Eichinvarianz“ bezeichnet.

5. Der Begriff der kovarianten Ableitung eines Halbvektors ermöglicht es, die Diracsche Wellengleichung für das Elektron in der allgemeinen Relativitätstheorie aufzustellen. Zu diesem Zwecke betrachten wir den Operator

$$F\psi = \frac{h}{2\pi i}\sum_k e_k \alpha_k \left(\frac{\partial \psi}{\partial s_k} - C_k \psi\right) - m c \alpha_4 \psi. \tag{22}$$

Wir wollen zeigen, daß er selbstadjungiert ist***. Um dieses einzusehen, gehen wir von den Beinen zu den Koordinaten über und führen die Matrizen

$$\gamma^\sigma = \sum_k e_k \alpha_k h_k^\sigma \tag{23}$$

und die durch (20) definierten Matrizen Γ_σ ein. Aus den Gleichungen (15) folgen analoge Beziehungen für die soeben eingeführten Matrizen

$$\Gamma_\alpha^+ \gamma^\sigma + \gamma^\sigma \Gamma_\alpha = -\nabla_\alpha \gamma^\sigma. \tag{24}$$

Diese Formel läßt sich leicht beweisen, indem man auf die Definition (12) der γ_{ikl} zurückgeht.

* H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik, § 19, S. 88. Leipzig 1928.

** V. Fock, Über die invariante Form der Wellen- und der Bewegungsgleichungen für einen geladenen Massenpunkt. ZS. f. Phys. **39**, 226, 1926.

*** Das Wort „selbstadjungiert“ verstehen wir hier in einem etwas erweiterten Sinne. Wir meinen nämlich darunter, daß der Ausdruck $\bar{\psi} F \psi - \overline{(F\psi)}\psi$ in Form einer (im allgemeinen vierdimensionalen) Divergenz geschrieben werden kann.

Durch die Koordinaten ausgedrückt, lautet der Operator F:

$$F\psi = \frac{h}{2\pi i}\gamma^\sigma\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^\sigma} - \Gamma_\sigma\psi\right) - mc\alpha_4\psi. \tag{25}$$

Unter Beachtung von (24) beweist man leicht die Identität

$$\overline{\psi}F\psi - \overline{(F\psi)}\psi = \frac{h}{2\pi i}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}(\overline{\psi}\sqrt{g}\gamma^\sigma\psi), \tag{26}$$

wo g den Absolutwert der Determinante $\|g_{\varrho\sigma}\|$ bezeichnet. Diese Identität drückt die Tatsache aus, daß der Operator F selbstadjungiert ist. Diese Tatsache gestattet es, für die Diracsche Gleichung in der allgemeinen Relativitätstheorie den Ansatz

$$F\psi = 0 \tag{27}$$

zu machen. Genügt ψ dieser Gleichung, so folgt aus der Identität (26), daß die Divergenz des Stromvektors

$$S^\varrho = \overline{\psi}\gamma^\varrho\psi, \tag{28}$$

der wegen des hermitischen Charakters der Matrizen γ^ϱ offenbar reell ist, verschwindet:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}(\sqrt{g}S^\sigma) = 0. \tag{29}$$

Es läßt sich leicht beweisen †, daß der Ansatz (25) und (27) für die Diracsche Gleichung nicht nur in bezug auf die Koordinatenwahl, sondern auch in bezug auf die Wahl der orthogonalen Kurvenkongruenzen invariant (genauer: kovariant) ist.

Zum Beweis bemerken wir zunächst, daß die Γ_σ eindeutig und übereinstimmend mit der früheren Definition (18), (20), (21) durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_\alpha^+\gamma^\sigma + \gamma^\sigma\Gamma_\alpha &= -\nabla_\alpha\gamma^\sigma \\ \frac{1}{4}\operatorname{Spur}\Gamma_\sigma &= \frac{2\pi i e}{hc}\varphi_\sigma \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

definiert werden können. Führt man jetzt irgend ein neues Netz von Kurvenkongruenzen ein und bezeichnet man die auf dieses Netz bezüglichen Größen mit einem Stern, so sind die neuen Γ_σ^*-Lösungen der analogen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_\alpha^{*+}\gamma^\sigma + \gamma^{*\sigma}\Gamma_\alpha^* &= -\nabla_\alpha\gamma^{*\sigma} \\ \frac{1}{4}\operatorname{Spur}\Gamma_\sigma^* &= \frac{2\pi i e}{hc}\varphi_\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{30*}$$

† Dieser Absatz (bis Ende des § 5) ist bei der Korrektur zugefügt.

Der Übergang zu neuen Beinrichtungen hat aber in jedem Raumzeitpunkt den Charakter einer lokalen Lorentztransformation. Folglich sind die neuen Komponenten des Halbvektors ψ^* und die neuen Matrizen $\gamma^{*\sigma}$ mit den alten ψ und γ^σ durch Relationen von der Form

$$\psi^* = S\psi; \qquad \gamma^\sigma = S^+\gamma^{*\sigma}S \tag{31}$$

[vgl. Formeln (5) und (6)] verknüpft, wo S eine Matrix von der Form

$$S = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \gamma & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar\alpha & \bar\beta \\ 0 & 0 & \bar\gamma & \bar\delta \end{Vmatrix}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

mit variablen Elementen bezeichnet.

Das Transformationsgesetz für die Koeffizienten Γ_σ der Parallelübertragung lautet aber:

$$\Gamma_\sigma^* = S\Gamma_\sigma S^{-1} + \frac{\partial S}{\partial x^\sigma} S^{-1}, \tag{32}$$

denn dieser Ausdruck ist die eindeutige Lösung von (30*)†.

Es gilt ferner die Beziehung

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial x^\sigma} - \Gamma_\sigma \psi^* = S\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^\sigma} - \Gamma_\sigma \psi\right). \tag{33}$$

Bezeichnet man mit $F^*\psi^*$ den zu (25) analogen Ausdruck, den man bekommt, wenn man dort γ^σ, Γ_σ und ψ mit einem Stern versieht, so folgt aus (31) und (33)

$$F\psi = S^+ F^* \psi^*. \tag{34}$$

Die Gleichung $F\psi = 0$ ist also mit $F^*\psi^* = 0$ gleichbedeutend, was zu beweisen war.

6. In diesem Paragraphen wollen wir den Operator F in einer anderen Form darstellen, indem wir die in der Formel (22) auftretende Summe $\sum_k e_k \alpha_k C_k$ berechnen.

Um das Resultat in übersichtlicher Form darstellen zu können, verfahren wir folgendermaßen. Wir führen die Größen ε_{ijkl} ein, welche verschwinden sollen, wenn unter den Indizes $ijkl$ zwei gleiche vorkommen, und im Falle verschiedener Indizes gleich $+1$ oder -1 sind, je nachdem die Zahlenfolge $ijkl$ aus $0\,1\,2\,3$ durch eine gerade oder eine ungerade Permutation hervorgeht. Mit Hilfe dieser Größen bilden wir den „Beinvektor"

$$f_i = \frac{1}{2}\sum_{jkl} e_j e_k e_l \varepsilon_{ijkl} \gamma_{jkl} \tag{35}$$

† Es gilt: Spur $\frac{\partial S}{\partial x^\sigma} S^{-1} = 0$.

mit den Komponenten

$$\left.\begin{aligned} f_0 &= -e_0(\gamma_{123}+\gamma_{231}+\gamma_{312}), \\ f_1 &= -e_1(\gamma_{203}+\gamma_{032}+\gamma_{320}), \\ f_2 &= -e_2(\gamma_{301}+\gamma_{013}+\gamma_{130}), \\ f_3 &= -e_3(\gamma_{102}+\gamma_{021}+\gamma_{210}). \end{aligned}\right\} \tag{35*}$$

Beachten wir die Identitäten

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= i\varrho_3\alpha_0, \\ \alpha_2\alpha_3 &= i\varrho_3\alpha_1, \\ \alpha_3\alpha_1 &= i\varrho_3\alpha_2, \\ \alpha_1\alpha_2 &= i\varrho_3\alpha_3, \end{aligned}\right\} \tag{1**}$$

die aus der Definition (1) der Matrizen α_i hervorgehen, so können wir die Summe $\sum_k e_k\alpha_k C_k$ in der Form

$$\sum_l e_l\alpha_l C_l = \sum_l e_l\alpha_l\left(i\Phi'_l - \frac{1}{2}\sum_j e_j\gamma_{jlj} - \frac{i}{2}\varrho_3 f_l\right) \tag{*}$$

schreiben. Wir bezeichnen

$$k_i = -\sum_j e_j\gamma_{jij} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\sqrt{g}\,h_i^\sigma\right) \tag{36}$$

und führen den Ausdruck (*) in (22) ein. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} F\psi = \sum_j e_j\alpha_j\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial s_j} - \frac{e}{c}\varphi'_j\psi + \frac{h}{4\pi i}k_j\psi\right) \\ + \frac{h}{4\pi}\varrho_3\sum_j e_j\alpha_j f_j\psi - mc\alpha_4\psi. \end{aligned} \tag{22*}$$

Wir bemerken, daß in diesem Ausdruck die erste und die zweite Summe einzeln selbstadjungierte Operatoren sind.

Falls alle Kongruenzen Normalenkongruenzen sind, verschwindet der „Beinvektor“ f_i, da jedes Riccisymbol γ_{ikl} mit drei verschiedenen Indizes einzeln verschwindet; ferner können wir dann die Hyperflächen, deren Normalen die Kurvenkongruenzen geben, als Koordinatenflächen wählen. Wir haben dann

$$ds^2 = \sum_j e_j H_j^2\,dx_j^2; \qquad \sqrt{g} = H_0H_1H_2H_3; \tag{37}$$

$$h_i^i = \frac{1}{H_i}; \qquad h_{i,i} = e_iH_i; \qquad f_i = 0, \tag{37*}$$

während alle Parameter $h_{i,\sigma}$ und h_i^σ mit verschiedenen Indizes verschwinden. Der Ausdruck für den Operator F lautet dann

$$F\psi = \sum_j e_j \alpha_j \frac{1}{H_j}\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \frac{e}{c}\varphi_j\psi + \frac{h}{4\pi i}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lg\frac{\sqrt{g}}{H_j}\right)\psi\right) - mc\alpha_4\psi. \tag{38}$$

Diese Formel erlaubt es, die Diracsche Gleichung in beliebigen krummlinigen orthogonalen Koordinaten sofort hinzuschreiben. Dabei ist folgendes zu beachten. Schreibt man z. B. im Falle eines gewöhnlichen Euklidischen Raumes die Gleichung (38) einmal in kartesischen, ein anderes Mal in krummlinigen Koordinaten, so sind die in (38) in beiden Fällen auftretenden ψ-Funktionen nicht identisch, sondern miteinander durch eine Transformation von der Form (2) mit variablen Koeffizienten α, β, γ, δ verknüpft. Diesen Umstand muß man bei der Aufstellung der Eindeutigkeitsforderungen für die ψ-Funktionen im Auge behalten.

Zum Schlusse dieses Paragraphen sei hier bemerkt, daß es bekanntlich in einem allgemeinen Riemannschen Raume nicht immer möglich ist, alle Kurvenkongruenzen als Normalenkongruenzen zu wählen. Das ist jedoch in den wichtigen Spezialfällen eines statischen Gravitationsfeldes mit zentraler und axialer Symmetrie jedenfalls möglich, wie es die von Schwarzschild und Levi-Civita gefundenen Lösungen der Einsteinschen Gleichungen gezeigt haben.

7. Wir wollen jetzt versuchen, den Energietensor zu finden. Zu diesem Zwecke betrachten wir den Tensor

$$A^{\sigma}_{\cdot\alpha} = \bar{\psi}\gamma^\sigma\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} - \Gamma_\alpha\psi\right) = \bar{\psi}\gamma^\sigma D_\alpha\psi \tag{39}$$

und berechnen seine Divergenz †.

Wir schreiben die Diracsche Gleichung mit ihrer konjugiert komplexen in der Form

$$\gamma^\sigma\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^\sigma} - \Gamma_\sigma\psi\right) - \frac{2\pi i}{h} mc\alpha_4\psi = 0, \tag{40}$$

$$\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^\sigma} - \bar{\psi}\Gamma_\sigma^+\right)\gamma^\sigma + \frac{2\pi i}{h} mc\bar{\psi}\alpha_4 = 0. \tag{40*}$$

† Die Resultate dieses Paragraphen könnte man auch in eleganterer Form durch Betrachtung einer infinitesimalen Koordinatentransformation ableiten (vgl. H. Tetrode, Allgemein-relativistische Quantentheorie des Elektrons, ZS. f. Phys. **50**, 336, 1928). Wir ziehen es jedoch vor, in mehr elementarer Weise vorzugehen.

Wir differentiieren (40) nach x^α und multiplizieren links mit $\overline{\psi}$; die Gleichung (40*) multiplizieren wir rechts mit $\frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}$ und addieren die Resultate. Beachten wir die aus (24) folgende Formel

$$\Gamma_\sigma^+ \gamma^\sigma + \gamma^\sigma \Gamma_\sigma = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}\, \gamma^\sigma}{\partial x^\sigma}, \tag{41}$$

so können wir die Summe in der Form

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\overline{\psi} \sqrt{g}\, \gamma^\sigma \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}\right) + \overline{\psi} \frac{\partial \gamma^\sigma}{\partial x^\alpha} D_\sigma \psi - \overline{\psi} \gamma^\sigma \frac{\partial \Gamma_\sigma}{\partial x^\alpha} \psi = 0 \tag{42}$$

schreiben. Ferner multiplizieren wir (40) links mit $-\overline{\psi}\Gamma_\alpha^+$, (40*) rechts mit $\Gamma_\alpha \psi$ und addieren; in der Summe ersetzen wir $\Gamma_\alpha^+ \gamma^\sigma$ und $\Gamma_\sigma^+ \gamma^\sigma$ durch ihre Ausdrücke aus (24) und (41). Wir bekommen auf diese Weise

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (\overline{\psi} \sqrt{g}\, \gamma^\sigma \Gamma_\alpha \psi) + \overline{\psi} (\nabla_\alpha \gamma^\sigma) D_\sigma \psi$$
$$- \overline{\psi} \gamma^\sigma \frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial x^\sigma} \psi + \overline{\psi} \gamma^\sigma (\Gamma_\sigma \Gamma_\alpha - \Gamma_\alpha \Gamma_\sigma) \psi = 0. \tag{43}$$

Ersetzen wir hier $\nabla_\alpha \gamma^\sigma$ durch

$$\nabla_\alpha \gamma^\sigma = \frac{\partial \gamma^\sigma}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\varrho}^\sigma \gamma^\varrho,$$

so ergibt die Subtraktion von (43) aus (42)

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (\sqrt{g}\, A^{\sigma}_{\cdot\alpha}) - \Gamma_{\alpha\varrho}^\sigma A^{\varrho}_{\cdot\sigma} = \overline{\psi} \gamma^\sigma D_{\sigma\alpha} \psi, \tag{44}$$

wo zur Abkürzung

$$D_{\sigma\alpha} = \frac{\partial \Gamma_\sigma}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial x^\sigma} + \Gamma_\sigma \Gamma_\alpha - \Gamma_\alpha \Gamma_\sigma \tag{45}$$

gesetzt ist.

Wir müssen nun die Matrix $D_{\sigma\alpha}$ berechnen. Wir haben

$$D_{\sigma\alpha} = D_\sigma D_\alpha - D_\alpha D_\sigma = \sum_{kl} e_k e_l h_{k,\sigma} h_{l,\alpha} D'_{kl}, \tag{46}$$

wo

$$D'_{kl} = D'_k D'_l - D'_l D'_k + \sum_m e_m (\gamma_{mlk} - \gamma_{mkl}) D'_m \tag{47}$$

gesetzt ist. Der Operator (47) ist gleich

$$D'_{kl} = \frac{1}{4} \sum_{ij} \alpha_i \alpha_j e_j \gamma_{ijkl} + \frac{2\pi i e}{hc} M'_{kl}, \tag{48}$$

wo γ_{ijkl} die Beinkomponenten des Riemannschen Tensors bezeichnen:

$$\gamma_{ijkl} = \frac{\partial \gamma_{ijk}}{\partial s_l} - \frac{\partial \gamma_{ijl}}{\partial s_k}$$
$$+ \sum_m e_m [\gamma_{ijm} (\gamma_{mkl} - \gamma_{mlk}) + \gamma_{mil} \gamma_{mjk} - \gamma_{mik} \gamma_{mjl}], \tag{49}$$

und der schiefsymmetrische Tensor M'_{kl}:

$$M'_{kl} = \frac{\partial \varphi'_k}{\partial s_l} - \frac{\partial \varphi'_l}{\partial s_k} + \sum_m e_m (\gamma_{mlk} - \gamma_{mkl}) \varphi'_m, \tag{50}$$

das elektromagnetische Feld darstellt.

Die Matrix $\gamma^\sigma D_{\sigma\alpha}$ drücken wir zunächst durch D'_{kl} aus:

$$\gamma^\sigma D_{\sigma\alpha} = \sum_{kl} e_k e_l \alpha_k h_{l\alpha} D'_{kl}. \tag{51}$$

Die hier auftretende Summe $\sum_k e_k \alpha_k D'_{kl}$ läßt sich mit Hilfe von (48) berechnen, wobei die zyklische Symmetrie des Riemannschen Tensors zu beachten ist. Man bekommt

$$\sum_k e_k \alpha_k D'_{kl} = \sum_k e_k \alpha_k \left(-\frac{1}{2} R'_{kl} + \frac{2\pi i e}{hc} M'_{kl}\right), \tag{52}$$

wo

$$R'_{kl} = -\sum_i e_i \gamma_{ikil} \tag{53}$$

die Beinkomponenten des verjüngten Riemannschen Tensors bezeichnen. Setzt man (52) in (51) ein, so bekommt man

$$\gamma^\sigma D_{\sigma\alpha} = \gamma^\varrho \left(-\frac{1}{2} R_{\varrho\alpha} + \frac{2\pi i e}{hc} M_{\varrho\alpha}\right). \tag{51*}$$

Wir haben somit für die Divergenz des Tensors $A^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha}$ den Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(\sqrt{g}\, A^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha}\right) - \Gamma^\sigma_{\alpha\varrho} A^{\varrho\cdot}_{\cdot\sigma} = S^\varrho \left(-\frac{1}{2} R_{\varrho\alpha} + \frac{2\pi i e}{hc} M_{\varrho\alpha}\right). \tag{54}$$

Setzen wir

$$\frac{ch}{2\pi i} A^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha} = W^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha} = T^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha} + i U^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha}, \tag{55}$$

wo $T^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha}$ und $U^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha}$ den reellen und den imaginären Teil des komplexen Tensors $W^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha}$ bezeichnen, so läßt sich die Formel (54) in der Form

$$\nabla_\sigma W^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha} = S^\varrho \left(e M_{\varrho\alpha} - \frac{hc}{4\pi i} R_{\varrho\alpha}\right) \tag{56}$$

schreiben, oder, wenn man den reellen und den imaginären Teil trennt,

$$\left.\begin{aligned} \nabla_\sigma T^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha} &= e S^\varrho M_{\varrho\alpha}, \\ \nabla_\sigma U^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha} &= \frac{hc}{4\pi} S^\varrho R_{\varrho\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Die zweite dieser Gleichungen ist eine leicht zu beweisende Identität, denn der Tensor $U^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha}$ ist gleich

$$U^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha} = -\frac{hc}{4\pi} \nabla_\alpha S^\sigma, \tag{58}$$

und die Divergenz des Vektors S^σ verschwindet nach (29).

Die Gleichung (57) sagt aus, daß die Divergenz des Tensors $T^{\sigma}_{\cdot\alpha}$ gleich der Lorentzkraft ist. Wir können deshalb $T^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha}$ als Energietensor deuten. Die Gleichungen (57) sind dann die Bewegungsgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie. Vielleicht wäre es konsequenter, nicht den reellen Teil $T^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha}$, sondern den gesamten komplexen Tensor $W^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha}$ als Energietensor zu deuten; auf die Frage, welche dieser Deutungen vorzuziehen ist, gehen wir hier nicht ein.

Bemerkenswert ist hier das Auftreten des elektromagnetischen Tensors $M_{\varrho\alpha}$ neben dem Riemannschen Tensor $R_{\varrho\alpha}$ in der Form einer hermitischen Matrix

$$\left\| R_{\varrho\alpha} - \frac{4\pi i e}{h c} M_{\varrho\alpha} \right\|.$$

8. Um aus den gewonnenen Resultaten die quantenmechanischen Bewegungsgleichungen abzuleiten, welche denjenigen eines Massenpunktes (geodätische Linie) entsprechen, verfahren wir folgendermaßen.

Wir wählen ein im Bereich der räumlichen Variablen x_1, x_2, x_3 vollständiges System von Funktionen:

$$\psi_n(x_0\, x_1\, x_2\, x_3;\, \zeta) \qquad (\zeta = 1, 2, 3, 4), \tag{59}$$

deren jede der Diracschen Gleichung genügt* und durch die Forderung

$$\iiint \overline{\psi}_n \gamma^0 \psi_n \sqrt{g}\, d x_1\, d x_2\, d x_3 = 1 \tag{60}$$

normiert ist. Wegen (26) und (27) folgt aus dem Bestehen dieser Gleichung für einen speziellen Wert von x_0 ihre Gültigkeit für jeden anderen Wert von x_0. Das Matrixelement für einen Operator L definieren wir durch die Formel

$$L_{mn} = \iiint \overline{\psi}_m L\, \psi_n \sqrt{g}\, d x_1\, d x_2\, d x_3. \tag{61}$$

Wir beachten, daß die Ausführungen des vorigen Paragraphen und speziell die Gleichung (54) ungeändert bleiben, wenn wir in $A^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha}$ und in S^{ϱ} ψ durch ψ_n und $\overline{\psi}$ durch $\overline{\psi}_m$, also durch zwei verschiedene Lösungen der Diracschen Gleichung ersetzen. Wir schreiben jetzt die Gleichung (54) in der Form

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \left(\overline{\psi}_m \sqrt{g}\, \gamma^{\sigma} D_\alpha \psi_n\right) &= \Gamma^{\sigma}_{\alpha\varrho} \overline{\psi}_m \gamma^{\varrho} D_\sigma \psi_n \\ &+ \overline{\psi}_m \gamma^{\varrho} \left(-\frac{1}{2} R_{\varrho\alpha} + \frac{2\pi i e}{h c} M_{\varrho\alpha}\right) \psi_n. \end{aligned} \tag{62}$$

* Vgl. hierzu V. Fock, ZS. f. Phys. **49**, 323, 1928 sowie **55**, 127, 1929.

Multiplizieren wir (62) mit $\sqrt{g}\, d x_1\, d x_2\, d x_3$, und integrieren wir über den ganzen Raum, so bleibt von der Summe auf der linken Seite von (62) nur ein einziges Glied übrig, und wir erhalten

$$\frac{d}{d x^0}\left\{\iiint \overline{\psi}_m \gamma^0 D_\alpha \psi_n \sqrt{g}\, d x_1\, d x_2\, d x_3\right\}$$

$$= \iiint \overline{\psi}_m \left[\Gamma^\sigma_{\alpha\varrho} \gamma^\varrho D_\sigma + \gamma^\varrho\left(-\frac{1}{2} R_{\varrho\alpha} + \frac{2\pi i e}{h c} M_{\varrho\alpha}\right)\right] \psi_n \cdot \sqrt{g}\, d x_1\, d x_2\, d x_3, \tag{63}$$

welche Gleichung wir symbolisch auch in der Form

$$\frac{d}{d x^0}(\gamma^0 D_\alpha) = \Gamma^\sigma_{\alpha\varrho} \gamma^\varrho D_\sigma + \gamma^\varrho\left(-\frac{1}{2} R_{\varrho\alpha} + \frac{2\pi i e}{h c} M_{\varrho\alpha}\right) \tag{64}$$

schreiben können, oder auch, wenn wir

$$P_\alpha = \frac{h}{2\pi i} D_\alpha \tag{65}$$

setzen, in der Form

$$\frac{d}{d x^0}(\gamma^0 P_\alpha) = \Gamma^\sigma_{\alpha\varrho} \gamma^\varrho P_\sigma + \gamma^\varrho\left(\frac{e}{c} M_{\varrho\alpha} - \frac{h}{4\pi i} R_{\varrho\alpha}\right). \tag{66}$$

Nun können wir die Operatoren γ^ϱ als Repräsentanten der klassischen Geschwindigkeit $\frac{d x^\varrho}{d x^0}$ und P_σ als diejenigen der kovarianten Bewegungsgrößen $m g_{\sigma\varrho} \frac{d x^\varrho}{d s}$ deuten. Diese Deutung ermöglicht es, den Übergang zur klassischen Theorie zu vollziehen. Tun wir dies, und vernachlässigen wir konsequenterweise das mit h behaftete Glied auf der rechten Seite, so erhalten wir genau die klassische Bewegungsgleichung für einen geladenen Massenpunkt im Gravitationsfeld und speziell — wenn kein elektromagnetisches Feld vorhanden ist — die Differentialgleichung der geodätischen Linie.

9. Der rein kovariante Tensor

$$W_{\sigma\alpha} = g_{\sigma\varrho} W^{\varrho}_{\cdot\alpha} = c\,\overline{\psi} \gamma_\sigma P_\alpha \psi \tag{55*}$$

ist in bezug auf seine Indizes nicht symmetrisch. Wegen der Bedeutung der Operatoren $c\gamma_\sigma$ und P_α (Geschwindigkeit und Bewegungsgröße) korrespondiert die quantenmechanische Größe $W_{\sigma\alpha}$ der klassischen Größe $\varrho_0 u_\sigma u_\alpha$

$$W_{\sigma\alpha} \to \varrho_0 u_\sigma u_\alpha, \tag{67}$$

wo u_σ die klassische kovariante Komponente der Vierergeschwindigkeit und ϱ_0 die Ruhdichte der Materie bezeichnet. Die Größe $\varrho_0 u_\sigma u_\alpha$ ist aber in bezug auf die Indizes symmetrisch.

Die Diracsche Gleichung (27) läßt sich aus einem Variationsprinzip ableiten, welches mit Hilfe des Energietensors wie folgt formuliert werden kann:

$$\delta \iiiint (W^{\sigma}_{\cdot\sigma} - m c^2 \overline{\psi} \alpha_4 \psi) \sqrt{g}\, d x_0\, d x_1\, d x_2\, d x_3 = 0. \tag{68}$$

Diese Gleichung liefert eine einfache physikalische Deutung der Invariante $m\overline{\psi}\alpha_4\psi$ als Ruhdichte der Materie.

10. Wir wollen nun die Ergebnisse unserer Untersuchung zusammenfassen.

Als Ausgangspunkt diente uns der Begriff der Parallelverschiebung eines Halbvektors. Mit Hilfe dieses Begriffs konnte das Auftreten der Potentiale φ_α neben den Impulsen p_α in der Diracschen Gleichung rein geometrisch gedeutet werden; die rein formelle Übertragung des Ausdrucks $p_\alpha - \frac{e}{c}\varphi_\alpha$ aus der klassischen Mechanik in die Quantenmechanik wurde damit überflüssig. Ferner erlaubte uns der genannte Begriff eine ungezwungene Einordnung der Potentiale in das geometrische Schema der allgemeinen Relativitätstheorie, was für die Aufstellung einer einheitlichen Theorie der Elektrizität und der Gravitation von Nutzen sein kann.

Ferner wurden die Diracschen Gleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie aufgestellt, die in bezug auf die Wahl der Koordinaten und der „Beine" invariant sind. Als Nebenresultat ergab sich daraus eine explizite Darstellung des Diracschen Operators in krummlinigen orthogonalen Koordinaten. Es wurde ein Tensor konstruiert, dessen Divergenz gleich der Lorentzkraft ist; dieser Tensor wurde als Energietensor und die von ihm befriedigte Gleichung als makroskopische Bewegungsgleichung gedeutet. Ferner wurden die quantenmechanischen Bewegungsgleichungen für das Elektron abgeleitet, die den klassischen Gleichungen für einen geladenen Massenpunkt oder — bei Abwesenheit eines elektromagnetischen Feldes — denjenigen einer geodätischen Linie entsprechen. Zum Schluß wurde das Variationsprinzip, aus welchem die Diracsche Gleichung abgeleitet werden kann, hingeschrieben.

Das Ziel, welchem wir nachstreben, war die Geometrisierung der Diracschen Theorie des Elektrons und ihre Einordnung in die allgemeine Relativitätstheorie. Dabei wurden die Schwierigkeiten, die der Diracschen Theorie anhaften — wie das Auftreten der negativen Energiewerte und eine nichtverschwindende Wahrscheinlichkeit einer Umladung des Elektrons —, überhaupt nicht berührt. Vielleicht dürften aber unsere Betrachtungen auf indirektem Wege zur Lösung dieser Schwierigkeiten beitragen, indem sie zeigen, was die ursprüngliche, unveränderte Diracsche Theorie leisten kann.

Leningrad, Physikalisches Institut der Universität, Mai/Juni 1929.

Nachtrag.

Nach dem Abschluß dieser Arbeit habe ich die sehr interessante Arbeit von H. Weyl* kennengelernt. Weyls mathematische Grundidee ist im wesentlichen mit dem Begriff der Parallelübertragung eines Halbvektors identisch. Der physikalische Inhalt von Weyls Arbeit ist jedoch von demjenigen meiner Arbeit völlig verschieden.

Die wesentlichen Züge der Auffassung von Weyl können wie folgt zusammengefaßt werden.

1. Weyl betrachtet die Diracsche Gleichung als eine Wellengleichung nicht für das Elektron, sondern für das System Elektron-Proton.

2. In den Gravitationszusatzgliedern glaubt Weyl einen Ersatz für das Glied $mc\alpha_4$ zu finden, welch letzteres einfach gestrichen wird.

Beide Thesen können, meiner Ansicht nach, kaum aufrechterhalten werden, denn sie stoßen auf wesentliche Schwierigkeiten, auf die ich hier aufmerksam machen möchte.

Die aus der Diracschen Gleichung folgenden quantenmechanischen Bewegungsgleichungen sind ein vollständiges Analogon zu den klassischen Bewegungsgleichungen für einen geladenen Massenpunkt (und nicht etwa für ein System aus zwei Körpern), wie bereits in meiner früheren Arbeit** gezeigt wurde.

Die Diracsche Gleichung, und zwar mit dem Gliede $mc\alpha_4$, eignet sich vollkommen zur Beschreibung einer kräftefreien Bewegung eines Elektrons als Welle im Sinne der ursprünglichen de Broglieschen Auffassung.

Die von Weyl vorgenommene Zerlegung des Stromvektors S in zwei Summanden $S^{(+)}$ und $S^{(-)}$, die als Strom positiver und negativer Elektrizität gedeutet werden, kann nicht aufrechterhalten werden, denn diese Summanden sind Nullvektoren, und nur ihre Summe $S = S^{(+)} + S^{(-)}$ ist ein zeitartiger Vektor***. Der Strom ist aber eine statistisch-

* H. Weyl, Gravitation and the Electron, Proc. Nat. Acad. Amer. **15**, 323, 1929.

** V. Fock, Über den Begriff der Geschwindigkeit usw., ZS. f. Phys. **55**, 127, 1929.

*** Beweis: Der zeitartige Charakter von S folgt aus der Identität (8) (wo jetzt S_i statt A_i zu lesen ist), denn sie ergibt

$$S_0^2 - S_1^2 - S_2^2 - S_3^2 = S_4^2 + S_5^2, \qquad (*)$$

$S_i^{(+)}$ bzw. $S_i^{(-)}$ erhält man aus S_i, wenn man ψ_3 und ψ_4 bzw. ψ_1 und ψ_2 gleich Null setzt; in beiden Fällen verschwindet S_4 und S_5, also auch die linke Seite von (*), was zu beweisen war.

makroskopische Größe und muß als solche denselben Charakter haben wie in der klassischen Theorie, also notwendig zeitartig sein.

Die Gleichungen von Weyl sollen das System Elektron-Proton beschreiben; man darf daher verlangen, daß sie die Energieniveaus des Wasserstoffatoms richtig wiedergeben. Wegen der Weglassung des Gliedes $mc\alpha_4$ ist das aber kaum möglich und jedenfalls nicht bewiesen.

Die von Weyl als Ersatz der Masse gedeuteten Gravitationsglieder [„Beinvektor" f_i in unserer Formel (35)] können zum Verschwinden gebracht werden, sobald ein System von Normalenkongruenzen existiert und speziell im Fall einer sphärischen Symmetrie, sowie im statischen Falle einer axialen Symmetrie. Von dem System Elektron-Proton dürfte man aber einen hohen Grad von Symmetrie erwarten.

Endlich bleibt es ganz unklar, wie eigentlich die Konstanten m und M — die Massen des Elektrons und des Protons — aus den Gravitationsgliedern zum Vorschein kommen sollen.

Wegen dieser Schwierigkeiten kann ich Weyls Versuch, das quantenmechanische Problem der Masse sowie das Zweikörperproblem anzugreifen, nicht als gelungen betrachten. Der allgemeinen Idee von Weyl, daß beide Probleme miteinander und mit der Gravitation eng verbunden sind, stimme ich dagegen gerne bei.

Zum Schluß möchte ich einige allgemeine Bemerkungen über den physikalischen Inhalt der Diracschen Gleichungen und über das quantenmechanische Zweikörperproblem machen.

Nach meiner Auffassung wird durch die Diracsche Gleichung nur das Elektron quantenmechanisch, die übrige Welt dagegen (vielleicht auch die Masse des Elektrons) makroskopisch beschrieben. Zur übrigen Welt wird hier auch das Proton gerechnet. Die Lösung des Zweikörperproblems muß darin bestehen, daß man eine quantenmechanische Beschreibung des Elektrons, des Protons, des elektromagnetischen Feldes und der Masse findet. Das quantenmechanische Problem der Masse scheint mir unangreifbar, solange man nur einen Körper betrachtet. Für die makroskopische Beschreibung der Gravitation und der Elektrizität scheint dagegen das quantenmechanische Einkörperproblem gute Dienste leisten zu können.