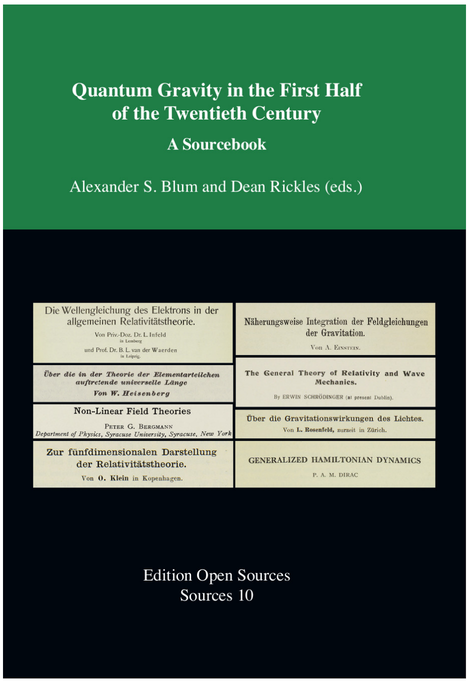
Edition Open Sources
Sources 10

Alexander S. Blum and Dean Rickles:

Hermann Weyl (1929): Elektron und Gravitation

DOI: 10.34663/9783945561317-14



In: Alexander S. Blum and Dean Rickles (eds.): *Quantum Gravity in the First Half of the Twentieth Century : A Sourcebook*
Online version at https://edition-open-sources.org/sources/10/

ISBN 978-3-945561-31-7, DOI 10.34663/9783945561317-00
First published 2018 by Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften, Edition Open Sources

The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at http://dnb.d-nb.de

Chapter 12
Hermann Weyl (1929): Elektron und Gravitation

Hermann Weyl (1929). Elektron und Gravitation, *Zeitschrift für Physik*, 56: 330–352.

Elektron und Gravitation. I.

Von **Hermann Weyl** in Princeton, N. J.

(Eingegangen am 8. Mai 1929).

Einleitung. Verhältnis der allgemeinen Relativitätstheorie zu den quantentheoretischen Feldgleichungen des spinnenden Elektrons: Masse, Eichinvarianz, Fernparallelismus. Zu erwartende Modifikationen der Diracschen Theorie. — I. Zweikomponententheorie: Die Wellenfunktion ψ hat nur zwei Komponenten. — § 1. Bindung der Transformation der ψ an die Lorentztransformation des normalen Achsenkreuzes in der vierdimensionalen Welt. Asymmetrie von Zukunft und Vergangenheit, von rechts und links. — § 2. In der allgemeinen Relativitätstheorie wird die Metrik in einem Weltpunkt festgelegt durch ein normales Achsenkreuz. Komponenten von Vektoren relativ zu den Achsen und den Koordinaten. Kovariante Differentiation von ψ. — § 3. Allgemein invariante Fassung der Diracschen Wirkungsgröße, welche für das Wellenfeld der Materie charakteristisch ist. — § 4. Die differentiellen Erhaltungssätze von Energie und Impuls und die Symmetrie des Impulstensors folgen aus der doppelten Invarianz: 1. gegenüber Koordinatentransformation, 2. gegenüber Drehungen des Achsenkreuzes. Impuls und Impulsmoment der Materie. — § 5. Einsteins klassische Gravitationstheorie in der neuen analytischen Formulierung. Gravitationsenergie. — § 6. Das elektromagnetische Feld. Aus der Unbestimmtheit des Eichfaktors in ψ ergibt sich die Notwendigkeit der Einführung der elektromagnetischen Potentiale. Eichinvarianz und Erhaltung der Elektrizität. Das Raumintegral der Ladung. Einführung der Masse. Diskussion und Zurückweisung einer anderen Möglichkeit, in welcher die Elektrizität nicht als Begleitphänomen der Materie, sondern der Gravitation erscheint.

Einleitung.

In dieser Arbeit entwickle ich in ausgeführter Form eine Gravitation, Elektrizität und Materie umfassende Theorie, von der eine kurze Skizze in den Proc. Nat. Acad., April 1929, erschienen ist. Es ist von verschiedenen Autoren der Zusammenhang der Einsteinschen Theorie des Fernparallelismus mit der Spintheorie des Elektrons bemerkt worden*. Trotz gewisser formaler Übereinstimmungen unterscheidet sich mein Ansatz in radikaler Weise dadurch, daß ich den Fernparallelismus ablehne und an Einsteins klassischer Relativitätstheorie der Gravitation festhalte.

Um zweier Gründe willen verspricht die Adaption der Pauli-Diracschen Theorie des spinnenden Elektrons an die allgemeine Relativität zu physikalisch fruchtbaren Ergebnissen zu führen. 1. Die Diracsche Theorie, in welcher das Wellenfeld des Elektrons durch ein Potential ψ mit vier Komponenten beschrieben wird, gibt doppelt zu viel Energieniveaus; man sollte darum, ohne die relativistische Invarianz preiszugeben, zu den zwei Komponenten der Paulischen Theorie zurück-

* E. Wigner, ZS. f. Phys. **53**, 592, 1929; u. a.

kehren können. Daran hindert das die Masse m des Elektrons als Faktor enthaltende Glied der Diracschen Wirkungsgröße. Masse ist aber ein Gravitationseffekt; es besteht so die Hoffnung, für dieses Glied in der Gravitationstheorie einen Ersatz zu finden, der die gewünschte Korrektur herbeiführt. 2. Die Diracschen Feldgleichungen für ψ zusammen mit den Maxwellschen Gleichungen für die vier Potentiale f_p des elektromagnetischen Feldes haben eine Invarianzeigenschaft, die in formaler Hinsicht derjenigen gleicht, die ich in meiner Theorie von Gravitation und Elektrizität vom Jahre 1918 als Eichinvarianz bezeichnet hatte; die Gleichungen bleiben ungeändert, wenn man gleichzeitig

$$\psi \text{ durch } e^{i\lambda} \cdot \psi \quad \text{und} \quad f_p \text{ durch } f_p - \frac{\partial \lambda}{\partial x_p}$$

ersetzt, unter λ eine willkürliche Ortsfunktion in der vierdimensionalen Welt verstanden. Dabei ist in f_p der Faktor $\frac{e}{ch}$ aufgenommen ($-e$ Ladung des Elektrons, c Lichtgeschwindigkeit, $\frac{h}{2\pi}$ Wirkungsquantum). Auch die Beziehung dieser „Eichinvarianz" zum Erhaltungssatz der Elektrizität bleibt unangetastet. Es ist aber ein wesentlicher und für den Anschluß an die Erfahrung bedeutungsvoller Unterschied, daß der Exponent des Faktors, den ψ annimmt, nicht reell, sondern rein imaginär ist. ψ übernimmt jetzt die Rolle, welche in jener alten Theorie das Einsteinsche ds spielte. Es scheint mir darum dieses nicht aus der Spekulation, sondern aus der Erfahrung stammende neue Prinzip der Eichinvarianz zwingend darauf hinzuweisen, daß das elektrische Feld ein notwendiges Begleitphänomen nicht des Gravitationsfeldes, sondern des materiellen, durch ψ dargestellten Wellenfeldes ist. Da die Eichinvarianz eine willkürliche Funktion λ einschließt, hat sie den Charakter „allgemeiner" Relativität und kann natürlich nur in ihrem Rahmen verstanden werden.

An den Fernparallelismus vermag ich aus mehreren Gründen nicht zu glauben. Erstens sträubt sich mein mathematisches Gefühl a priori dagegen, eine so künstliche Geometrie zu akzeptieren; es fällt mir schwer, die Macht zu begreifen, welche die lokalen Achsenkreuze in den verschiedenen Weltpunkten in ihrer verdrehten Lage zu starrer Gebundenheit aneinander hat einfrieren lassen. Es kommen, wie ich glaube, zwei gewichtige physikalische Gründe hinzu. Gerade dadurch, daß man den Zusammenhang zwischen den lokalen Achsenkreuzen löst, verwandelt sich der Eichfaktor $e^{i\lambda}$, der in der Größe ψ willkürlich bleibt, notwendig aus einer Konstante in eine willkürliche Ortsfunktion; d. h. nur durch diese Lockerung wird die tatsächlich bestehende Eichinvarianz verständlich. Und zweitens ist die Möglichkeit, die Achsenkreuze an verchiedenen Stellen unabhängig voneinander zu drehen, wie wir im folgenden sehen werden, gleichbedeutend mit der Symmetrie des Energieimpulstensors oder mit der Gültigkeit des Erhaltungssatzes für das Impulsmoment.

Bei jedem Versuch zur Aufstellung der quantentheoretischen Feldgleichungen muß man im Auge haben, daß diese nicht direkt mit der Erfahrung verglichen werden können, sondern erst nach ihrer Quantisierung die Unterlage liefern für die statistischen Aussagen über das Verhalten der materiellen Teilchen und Lichtquanten. Die Dirac-Maxwellsche Theorie in ihrer bisherigen Form enthält nur die elektromagnetischen Potentiale f_p und das Wellenfeld ψ des Elektrons. Zweifellos muß das Wellenfeld ψ' des Protons hinzugefügt werden. Und zwar werden in den Feldgleichungen ψ, ψ' und f_p Funktionen derselben vier Raum-Zeitkoordinaten sein, man wird vor der Quantisierung nicht etwa verlangen dürfen, daß ψ Funktion eines Weltpunktes (t, xyz) und ψ' Funktion eines davon unabhängigen Weltpunktes $(t', x'y'z')$ ist. Es ist naheliegend, zu erwarten, daß von den beiden Komponentenpaaren der Diracschen Größe das eine dem Elektron, das andere dem Proton zugehört. Ferner werden zwei Erhaltungssätze der Elektrizität auftreten müssen, die (nach der Quantisierung) besagen, daß die Anzahl der Elektronen wie der Protonen konstant bleibt. Ihnen wird eine zweifache, zwei willkürliche Funktionen involvierende Eichinvarianz entsprechen müssen.

Wir prüfen zunächst die Sachlage in der speziellen Relativitätstheorie daraufhin, ob und inwieweit bereits die formalen Erfordernisse der Gruppentheorie, noch ganz abgesehen von den mit der Erfahrung in Einklang zu bringenden dynamischen Differentialgleichungen, die Erhöhung der Komponentenzahl ψ von zwei auf vier notwendig machen. Wir werden sehen, daß man mit zwei Komponenten auskommt, wenn die Symmetrie von links und rechts aufgehoben wird.

Zweikomponententheorie.

§ 1. Transformationsgesetz von ψ. Führt man im Raume mit den kartesischen Koordinaten x, y, z homogene projektive Koordinaten x_α ein:

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}, \quad z = \frac{x_3}{x_0},$$

so lautet die Gleichung der Einheitskugel

$$- x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0. \tag{1}$$

Projiziert man sie vom Südpol auf die Äquatorebene $z = 0$, die als Träger der komplexen Variablen

$$x + iy = \zeta = \frac{\psi_2}{\psi_1}$$

betrachtet wird, so gelten die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \overline{\psi}_1 \psi_1 + \overline{\psi}_2 \psi_2, & x_1 &= \overline{\psi}_1 \psi_2 + \overline{\psi}_2 \psi_1, \\ x_2 &= i(-\overline{\psi}_1 \psi_2 + \overline{\psi}_2 \psi_1), & x_3 &= \overline{\psi}_1 \psi_1 - \overline{\psi}_2 \psi_2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

x_α sind Hermitesche Formen von ψ_1, ψ_2. Die Variablen ψ_1, ψ_2 sowie die Koordinaten x_α kommen hier nur ihrem Verhältnis nach in Frage. Eine homogene lineare Transformation von ψ_1, ψ_2 (mit komplexen Koeffizienten) bewirkt eine lineare, reelle Transformation unter den Koordinaten x_α: sie stellt eine Kollineation dar, welche die Einheitskugel in sich überführt und auf der Einheitskugel den Drehsinn ungeändert läßt. Es ist leicht zu zeigen und wohl bekannt, daß man auf diese Weise jede derartige Kollineation einmal und nur einmal erhält.

Vom homogenen Standpunkt zum inhomogenen übergehend, fasse man jetzt x_α als Koordinaten in der vierdimensionalen Welt und (1) als die Gleichung des „Lichtkegels" auf; und man beschränke sich auf solche lineare Transformationen U von ψ_1, ψ_2, deren Determinante den absoluten Betrag 1 hat. U bewirkt an den x_α eine Lorentztransformation, d. i. eine reelle homogene lineare Transformation, welche die Form

$$- x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

in sich überführt. Doch lehren die Formel für x_0 und unsere Bemerkung über die Erhaltung des Drehungssinnes auf der Kugel ohne weiteres, daß wir unter den Lorentztransformationen nur die ein einziges in sich abgeschlossenes Kontinuum bildenden Λ bekommen, welche 1. Vergangenheit und Zukunft nicht vertauschen und 2. die Determinante $+1$, nicht -1, besitzen; diese freilich ohne Ausnahme. Durch Λ ist die lineare Transformation U der ψ nicht eindeutig festgelegt, sondern es bleibt ein willkürlicher konstanter Faktor $e^{i\lambda}$ vom absoluten Betrage 1 zur Disposition. Man kann ihn normalisieren durch die Forderung, daß die Determinante von U gleich 1 sei, aber selbst dann bleibt eine Doppeldeutigkeit zurück. An der Einschränkung 1. möchte man festhalten; es ist eine der hoffnungsvollsten Seiten der ψ-Theorie, daß sie der Wesensverschiedenheit von Vergangenheit und Zukunft Rechnung tragen kann. Die Einschränkung 2. hebt die Gleichberechtigung von links und rechts auf.

Nur diese tatsächlich in der Natur bestehende Symmetrie von rechts und links wird uns zwingen (Teil II), ein zweites Paar von ψ-Komponenten einzuführen.

Die Hermitesche Konjugierte einer Matrix $A = \|a_{ik}\|$ werde mit A^* bezeichnet:

$$a^*_{ik} = \bar{a}_{ki}.$$

S_α sei die Koeffizientenmatrix der Hermiteschen Form der Variablen ψ_1, ψ_2, durch welche in (2) die Koordinate x_α dargestellt wird:

$$x_\alpha = \psi^* S_\alpha \psi; \tag{3}$$

hier bedeutet ψ die Spalte ψ_1, ψ_2. S_0 ist die Einheitsmatrix; es gelten die Gleichungen

$$S_1^2 = 1, \quad S_2 S_3 = i S_1 \tag{4}$$

und die daraus durch zyklische Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 hervorgehenden.

Es ist formal etwas bequemer, die reelle Zeitkoordinate x_0 durch die imaginäre $i x_0$ zu ersetzen. Die Lorentztransformationen erscheinen dann als orthogonale Transformationen der vier Größen

$$x(0) = i x_0, \quad x(\alpha) = x_\alpha \qquad [\alpha = 1, 2, 3].$$

Statt (3) schreibe man

$$x(\alpha) = \psi^* S(\alpha)\, \psi. \tag{5}$$

Das Transformationsgesetz der ψ-Komponenten besteht darin, daß sie unter dem Einfluß einer Transformation Λ der Weltkoordinaten $x(\alpha)$ sich so umsetzen, daß die Größen (5) die Transformation Λ erleiden. Eine Größe von dieser Art stellt, wie sich aus dem Spinphänomen ergeben hat, das Wellenfeld eines materiellen Teilchens dar. $x(\alpha)$ sind die Koordinaten in einem „normalen Achsenkreuz“ $\mathbf{e}(\alpha)$; $\mathbf{e}(1)$, $\mathbf{e}(2)$, $\mathbf{e}(3)$ sind reelle raumartige Vektoren, welche ein kartesisches Linkskoordinatensystem bilden, $\frac{\mathbf{e}(0)}{i}$ ist ein reeller zeitartiger, in die Zukunft gerichteter Weltvektor. Die Transformation Λ beschreibt den Übergang von einem solchen normalen Achsenkreuz zu einem anderen gleichberechtigten, der weiterhin kurz als Drehung des Achsenkreuzes bezeichnet werden möge. Wir bekommen dieselben Koeffizienten $c(\alpha\beta)$, ob wir die Transformation Λ an den Grundvektoren des Achsenkreuzes oder den Koordinaten ausdrücken:

$$\mathbf{x} = \sum_\alpha x(\alpha)\, \mathbf{e}(\alpha) = \sum_\alpha x'(\alpha)\, \mathbf{e}'(\alpha),$$

$$\mathbf{e}'(\alpha) = \sum_\beta c(\alpha\beta)\, \mathbf{e}(\beta), \quad x'(\alpha) = \sum_\beta c(\alpha\beta)\, x(\beta);$$

das folgt aus dem orthogonalen Charakter von Λ.

Für das Folgende ist es nötig, die infinitesimale Transformation

$$d\psi = dE \, . \, \psi \tag{6}$$

zu berechnen, welche einer beliebigen infinitesimalen Drehung $d\Omega$:

$$dx(\alpha) = \sum_{\beta} do(\alpha\beta) \, . \, x(\beta),$$

entspricht. Die $do(\alpha\beta)$ bilden eine schiefsymmetrische Matrix. Die Transformation (6) ist so normiert gedacht, daß die Spur von dE gleich 0 wird. Die Matrix dE hängt linear homogen von den $do(\alpha\beta)$ ab; wir schreiben daher

$$dE = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} do(\alpha\beta) \, . \, A(\alpha\beta) = \sum do(\alpha\beta) \, . \, A(\alpha\beta).$$

Die letzte Summe soll nur über die Paare

$$(\alpha\beta) = (0\,1),\ (0\,2),\ (0\,3);\quad (2\,3),\ (3\,1),\ (1\,2)$$

erstreckt werden. $A(\alpha\beta)$ hängt natürlich schiefsymmetrisch von α und β ab. Es darf nicht vergessen werden, daß die Koeffizienten $do(\alpha\beta)$ für die ersten drei Paare $(\alpha\beta)$ rein imaginär, für die letzten drei Paare reell, im übrigen aber willkürlich sind. Man findet

$$A(2\,3) = -\frac{1}{2i} S(1), \quad A(0\,1) = \frac{1}{2i} S(1) \tag{7}$$

und zwei analoge Paare von Gleichungen, die daraus durch zyklische Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 entstehen. Zur Bestätigung hat man lediglich auszurechnen, daß die infinitesimalen Transformationen dE

$$d\psi = \frac{1}{2i} S(1)\,\psi \quad \text{und} \quad d\psi = \frac{1}{2} S(1)\,\psi$$

die infinitesimalen Drehungen

$$dx(0) = 0, \quad dx(1) = 0, \quad dx(2) = -x(3), \quad dx(3) = x(2)$$

bzw.

$$dx(0) = ix(1), \quad dx(1) = -ix(0), \quad dx(2) = 0, \quad dx(3) = 0$$

hervorbringen.

§ 2. Metrik und Parallelverschiebung. Wir gehen über zur allgemeinen Relativitätstheorie. Die Metrik in einem Weltpunkte P beschreiben wir durch Angabe eines lokalen normalen Achsenkreuzes $\mathfrak{e}(\alpha)$. Nur die Klasse der normalen Achsenkreuze — welche durch die Gruppe der Drehungen Λ miteinander verbunden sind — ist durch die Metrik bestimmt; durch einen Akt der Willkür wird ein einzelnes Individuum aus dieser Klasse ausgesucht. Die Gesetze sind demnach invariant gegenüber beliebigen Drehungen der lokalen Achsenkreuze; dabei ist die Drehung des Achsenkreuzes in dem von P verschiedenen Punkt P' unabhängig von der Drehung in P. $\psi_1(P)$, $\psi_2(P)$ seien die Komponenten des Materiepotentials im Punkte P relativ zum daselbst gewählten lokalen Achsenkreuz $\mathbf{e}(\alpha)$. Ein Vektor $\mathbf{t}$ in P kann in der Form geschrieben werden

$$\mathbf{t} = \sum_\alpha t(\alpha)\, \mathbf{e}(\alpha);$$

die Zahlen $t(\alpha)$ sind seine Komponenten im Achsenkreuz.

Zur analytischen Darstellung bedürfen wir ferner eines Koordinatensystems x_p; x_p sind irgend vier stetige Ortsfunktionen in der Welt, deren Werte die verschiedenen Weltpunkte voneinander zu unterscheiden gestatten. Die Gesetze sind demnach invariant gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen. $e^p(\alpha)$ mögen die Komponenten von $\mathbf{e}(\alpha)$ im Koordinatensystem sein. Diese $4 \cdot 4$ Größen $e^p(\alpha)$ beschreiben das Gravitationsfeld. Die kontravarianten Komponenten t^p eines Vektors $\mathbf{t}$ im Koordinatensystem hängen mit seinen Komponenten $t(\alpha)$ im Achsenkreuz durch die Gleichungen zusammen:

$$t^p = \sum_\alpha t(\alpha) \cdot e^p(\alpha).$$

Andererseits berechnen sich die $t(\alpha)$ aus seinen kovarianten Komponenten t_p im Koordinatensystem vermöge

$$t(\alpha) = \sum_p t_p \cdot e^p(\alpha).$$

Diese Gleichungen regeln die Verwandlung der Indizes. Die auf das Achsenkreuz bezüglichen griechischen Indizes habe ich als Argumente geschrieben, weil hier zwischen Hoch- und Tiefstellung nicht zu unterscheiden ist. Die Verwandlung im umgekehrten Sinne geschieht mittels der zu $\| e^p(\alpha) \|$ inversen Matrix $\| e_p(\alpha) \|$:

$$\sum_\alpha e_p(\alpha)\, e^q(\alpha) = \delta_p^q \quad \text{und} \quad \sum_p e_p(\alpha)\, e^p(\beta) = \delta(\alpha, \beta).$$

δ ist 0 oder 1, je nachdem die Indizes übereinstimmen oder nicht. Die Regel über das Fortlassen der Summenzeichen wird fortan sowohl für die lateinischen wie die griechischen Indizes befolgt. ε sei der absolute Betrag der Determinante $|e^p(\alpha)|$. Die Division einer lateinisch benannten Größe durch ε wird, wie üblich, durch die Verwandlung des lateinischen in den entsprechenden deutschen Buchstaben bezeichnet; z. B.

$$\mathfrak{e}^p(\alpha) = \frac{e^p(\alpha)}{\varepsilon}.$$

Einen Vektor und einen Tensor kann man durch die auf das Koordinatensystem oder durch die auf das Achsenkreuz bezüglichen Komponenten beschreiben. In bezug auf die Größe ψ kann aber nur von Komponenten im Achsenkreuz die Rede sein. Denn das Transformationsgesetz ihrer Komponenten ist durch eine Darstellung der Drehungsgruppe geregelt, welche sich nicht auf die Gruppe aller linearen Transformationen ausdehnen läßt. Daher die Notwendigkeit, in der Theorie der Materie das Gravitationsfeld auf die hier geschilderte Art, statt durch die metrische Grundform

$$\sum_{p,\,q} g_{pq}\, dx_p\, dx_q,$$

analytisch darzustellen *. Übrigens ist

$$g_{pq} = e_p(\alpha)\, e_q(\alpha).$$

Die Gravitationstheorie muß nun in diese neue analytische Form umgegossen werden. Ich beginne mit den Formeln für die durch die Metrik bestimmte infinitesimale Parallelverschiebung. Der Vektor $\mathbf{e}(\alpha)$ im Punkte P gehe durch sie in den Vektor $\mathbf{e}'(\alpha)$ im unendlich benachbarten Punkte P' über. Die $\mathbf{e}'(\alpha)$ bilden in P' ein normales Achsenkreuz, das aus dem lokalen Achsenkreuz $\mathbf{e}(\alpha) = \mathbf{e}(\alpha; P')$ daselbst durch eine infinitesimale Drehung $d\Omega$ hervorgeht:

$$\delta\,\mathbf{e}(\beta) = \sum_{\gamma} d\,o(\beta\gamma)\cdot\mathbf{e}(\gamma), \quad \delta\,\mathbf{e}(\beta) = \mathbf{e}'(\beta) - \mathbf{e}(\beta; P'). \tag{8}$$

$d\Omega$ hängt linear von der Verschiebung PP' oder ihren Komponenten

$$dx_p = (dx)^p = v^p = e^p(\alpha)\, v(\alpha)$$

ab. Wir schreiben darum

$$d\Omega = \Omega_p\,(dx)^p, \quad d\,o(\beta\gamma) = o_p(\beta\gamma)\,(dx)^p = o(\alpha;\beta\gamma)\,v(\alpha). \tag{9}$$

Die Parallelverschiebung des Vektors $\mathbf{t}$ mit den Komponenten t^p wird, wie man weiß, durch eine Gleichung beschrieben:

$$d\mathbf{t} = -d\Gamma.\mathbf{t}, \quad \text{d. i.} \quad dt^p = -d\Gamma^p_r.t^r, \quad d\Gamma^p_r = \Gamma^p_{rq}\,(dx)^q,$$

in welcher die sowohl von $\mathbf{t}$ wie von der Verschiebung dx unabhängigen Größen Γ^p_{rq} symmetrisch in r und q sind. Wir haben also

$$\mathbf{e}'(\beta) - \mathbf{e}(\beta) = -d\Gamma.\mathbf{e}(\beta).$$

Daneben gilt die Gleichung (8). Subtraktion der beiden Differenzen auf der linken Seite ergibt das Differential $d\,\mathbf{e}(\beta) = \mathbf{e}(\beta; P') - \mathbf{e}(\beta; P)$:

$$d\,\mathbf{e}^p(\beta) + d\Gamma^p_r e^r(\beta) = -d\,o(\beta\gamma).e^p(\gamma),$$

$$\frac{\partial e^p(\beta)}{\partial x_q}\cdot e^q(\alpha) + \Gamma^p_{rq}\, e^r(\beta)\, e^q(\alpha) = -o(\alpha;\beta\gamma)\, e^p(\gamma).$$

* In formaler Übereinstimmung mit Einsteins neueren Arbeiten über Gravitation und Elektrizität, Sitzungsber. Preuß. Ak. Wissensch. 1928, S. 217, 224; 1929, S. 2. Einstein gebraucht den Buchstaben h statt e.

Man kann hier die o eliminieren und erhält die bekannten Gleichungen zur Bestimmung von Γ, wenn man ausdrückt, daß $o(\alpha;\beta\gamma)$ schiefsymmetrisch ist in bezug auf β und γ. Man eliminiert die Γ und berechnet o, indem man Gebrauch davon macht, daß Γ^p_{rq} symmetrisch in bezug auf r und q oder

$$\Gamma^p(\beta,\alpha) = \Gamma^p_{rq}\, e^r(\beta)\, e^q(\alpha)$$

symmetrisch in α und β ist:

$$\frac{\partial e^p(\alpha)}{\partial x_q}\cdot e^q(\beta) - \frac{\partial e^p(\beta)}{\partial x_q}\cdot e^q(\alpha) = \{o(\alpha;\beta\gamma) - o(\beta;\alpha\gamma)\}\, e^p(\gamma). \quad (10)$$

Die linke Seite besteht aus den Komponenten jenes gegenüber Koordinatentransformation invarianten „Kommutatorprodukts" der beiden Vektorfelder $\mathbf{e}(\alpha)$, $\mathbf{e}(\beta)$, welches die entscheidende Rolle in der Lieschen Theorie der infinitesimalen Transformationen spielt; es soll mit $[\mathbf{e}(\alpha), \mathbf{e}(\beta)]$ bezeichnet werden. Weil $o(\beta;\alpha\gamma)$ schiefsymmetrisch ist in α und γ, hat man daher

$$[\mathbf{e}(\alpha), \mathbf{e}(\beta)]^p = \{o(\alpha;\beta\gamma) + o(\beta;\gamma\alpha)\}\, e^p(\gamma)$$

oder

$$o(\alpha;\beta\gamma) + o(\beta;\gamma\alpha) = [\mathbf{e}(\alpha), \mathbf{e}(\beta)](\gamma). \quad (11)$$

Nimmt man in dieser Gleichung die drei zyklischen Vertauschungen von $\alpha\beta\gamma$ vor und addiert die entstehenden Gleichungen mit den Vorzeichen $+ - +$, so erhält man

$$2\, o(\alpha;\beta\gamma) = [\mathbf{e}(\alpha), \mathbf{e}(\beta)](\gamma) - [\mathbf{e}(\beta), \mathbf{e}(\gamma)](\alpha) + [\mathbf{e}(\gamma), \mathbf{e}(\alpha)](\beta).$$

$o(\alpha;\beta\gamma)$ ist also in der Tat eindeutig bestimmt. Der gefundene Ausdruck genügt allen Bedingungen, weil er, wie ohne weiteres ersichtlich, schiefsymmetrisch in β und γ ist.

Für das Folgende benötigen wir insbesondere die Verkürzung

$$o(\varrho,\varrho\alpha) = [\mathbf{e}(\alpha), \mathbf{e}(\varrho)](\varrho) = \frac{\partial e^p(\alpha)}{\partial x_p} - \frac{\partial e^p(\varrho)}{\partial x_q}\cdot e^q(\alpha)\, e_p(\varrho).$$

Da

$$-\varepsilon\,.\,\delta\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = e_q(\varrho)\,.\,\delta e^q(\varrho)$$

ist, kommt

$$o(\varrho,\varrho\alpha) = \varepsilon\cdot\frac{\partial \mathfrak{e}^p(\alpha)}{\partial x^p}. \quad (12)$$

§ 3. Wirkung der Materie. Mit Hilfe der Parallelverschiebung kann nicht nur die kovariante Ableitung eines Vektor- oder Tensorfeldes, sondern auch diejenige des ψ-Feldes berechnet werden. $\psi_a(P)$, $\psi_a(P')$ $[a = 1, 2]$ seien die Komponenten relativ zu dem lokalen Achsenkreuz $\mathbf{e}(\alpha)$ in P bzw. P'. Die Differenz $\psi_a(P') - \psi_a(P) = d\psi_a$ ist das gewöhnliche Differential. Andererseits übertragen wir das Achsenkreuz $\mathfrak{e}(\alpha)$ von P nach P' durch Parallelverschiebung: $\mathfrak{e}'(\alpha)$; ψ'_a seien die Komponenten von ψ in P' in bezug auf das Achsenkreuz $\mathfrak{e}'(\alpha)$ daselbst. ψ_a wie ψ'_a hängen nur von der Wahl des Achsenkreuzes $\mathfrak{e}(\alpha)$ in P ab; sie haben nichts mit dem lokalen Achsenkreuz in P' zu tun. Mit der Drehung des Achsenkreuzes in P transformieren sich die ψ'_a ebenso wie die ψ_a, desgleichen die Differenzen $\delta\psi_a = \psi'_a - \psi_a$. Sie sind die Komponenten des **kovarianten Differentials** $\delta\psi$ von ψ. $\mathfrak{e}'(\alpha)$ geht aus dem lokalen Achsenkreuz $\mathfrak{e}(\alpha) = \mathfrak{e}(\alpha;\, P')$ in P' durch die in § 2 bestimmte infinitesimale Drehung $d\Omega$ hervor. Die entsprechende infinitesimale Transformation

$$dE = \tfrac{1}{2}\, d\,o(\beta\gamma)\,.\,A(\beta\gamma)$$

führt $\psi_a(P')$ in ψ'_a über, d. h. $\psi' - \psi(P')$ ist $= dE\,.\,\psi$. Addiert man $d\psi = \psi(P') - \psi(P)$, so erhält man

$$\delta\psi = d\psi + dE\,.\,\psi. \tag{13}$$

Alles hängt linear von der Verschiebung PP' ab. Es werde

$$\delta\psi = \psi_p\,(dx)^p = \psi(\alpha)\,v(\alpha), \quad dE = E_p\,(dx)^p = E(\alpha)\,v(\alpha)$$

geschrieben. Wir finden

$$\psi_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_p} + E_p\right)\psi \quad \text{oder} \quad \psi(\alpha) = \left(e^p(\alpha)\,\frac{\partial}{\partial x_p} + E(\alpha)\right)\psi.$$

Darin ist

$$E(\alpha) = \tfrac{1}{2}\, o(\alpha;\, \beta\gamma)\, A(\beta\gamma).$$

Ist ψ' eine Größe von demselben Transformationsgesetz wie ψ, so sind

$$\psi^*\, S(\alpha)\, \psi'$$

die Komponenten eines Vektors mit Bezug auf das lokale Achsenkreuz. Darum ist

$$v'(\alpha) = \psi^*\, S(\alpha)\, \delta\psi = \psi^*\, S(\alpha)\, \psi(\beta)\,.\,v(\beta)$$

eine vom Achsenkreuz unabhängige lineare Abbildung $v \rightarrow v'$ des Vektorkörpers in P. Ihre Spur

$$\psi^*\, S(\alpha)\, \psi(\alpha)$$

ist folglich ein Skalar, und die Gleichung

$$i\,\varepsilon\,\mathfrak{m} = \psi^*\, S(\alpha)\, \psi(\alpha) \tag{14}$$

definiert eine skalare Dichte $\mathfrak{m}$, deren Integral

$$\int \mathfrak{m}\, dx \quad (dx = dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3)$$

als Wirkungsgröße Verwendung finden kann.

Um zu einem expliziten Ausdruck von $\mathfrak{m}$ zu kommen, müssen wir

$$S(\alpha)\,E(\alpha) = \tfrac{1}{2}\,S(\alpha)\,A(\beta\,\gamma)\cdot o(\alpha;\,\beta\,\gamma) \tag{15}$$

ausrechnen. Aus (7) und (4) ergibt sich, daß

$$S(\beta)\,A(\beta\,\alpha) = \tfrac{1}{2}\,S(\alpha) \quad [\alpha \neq \beta, \text{ nicht über } \beta \text{ summieren!}]$$

ist und

$$S(\beta)\,A(\gamma\,\delta) = \tfrac{1}{2}\,S(\alpha),$$

wenn $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ eine gerade Permutation der Indizes 0 1 2 3 ist. Die Glieder der ersten und zweiten Art liefern darum als Beitrag zu (15) die folgenden Multipla von $S(\alpha)$:

$$\frac{1}{2}\,o(\varrho;\,\varrho\,\alpha) = \frac{1}{2\,\varepsilon}\,\frac{\partial\,\mathfrak{e}^p(\alpha)}{\partial x_p}$$

bzw.

$$o(\beta;\,\gamma\,\delta) + o(\gamma;\,\delta\,\beta) + o(\delta;\,\beta\,\gamma) = \frac{i}{2}\,\varphi(\alpha).$$

Nach (11) ist, wenn $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ eine gerade Permutation von 0 1 2 3 ist,

$$i\,\varphi(\alpha) = [\mathbf{e}(\beta),\,\mathbf{e}(\gamma)](\delta) + + \text{ (zykl. Permutationen von } \beta\,\gamma\,\delta)$$

$$= \sum \pm \frac{\partial\,e^p(\beta)}{\partial x_q}\,e^q(\gamma)\,e_p(\delta). \tag{16}$$

Die Summe erstreckt sich alternierend über die sechs Permutationen von $\beta\,\gamma\,\delta$ (außerdem natürlich über p und q). Mit diesen Bezeichnungen gilt

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{i}\left(\psi^*\,\mathfrak{e}^p(\alpha)\,S(\alpha)\,\frac{\partial\psi}{\partial x_p} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial\,\mathfrak{e}^p(\alpha)}{\partial x_p}\cdot\psi^*\,S(\alpha)\,\psi\right) + \frac{1}{4\,\varepsilon}\cdot\varphi(\alpha)\,\mathfrak{s}(\alpha). \tag{17}$$

Der zweite Teil ist

$$= \frac{1}{4\,i\,\varepsilon}\left|\,e_p(\alpha),\ e^q(\alpha),\ \frac{\partial\,e^p(\alpha)}{\partial x_q},\ \mathfrak{s}(\alpha)\,\right|$$

(summiert über p und q); jedes Glied ist eine Determinante von vier Zeilen, die man aus der hingeschriebenen Zeile erhält, wenn man der Reihe nach $\alpha = 0, 1, 2, 3$ setzt.

$$\mathfrak{s}(\alpha) \text{ ist } = \psi^*\,S(\alpha)\,\psi. \tag{18}$$

Nicht das Wirkungsintegral

$$\int \mathfrak{h}\,dx \tag{19}$$

selbst, sondern nur seine Variation ist von Bedeutung für die Naturgesetze. Darum ist es nicht nötig, daß $\mathfrak{h}$ reell ist, sondern es genügt, wenn die Differenz $\bar{\mathfrak{h}} - \mathfrak{h}$ eine Divergenz ist. In diesem Falle sagen wir, $\mathfrak{h}$ sei praktisch reell. Wir müssen prüfen, wie es in dieser Hinsicht mit $\mathfrak{m}$ bestellt ist. $e^p(\alpha)$ ist reell für $\alpha = 1, 2, 3$, rein imaginär für $\alpha = 0$. Darum ist $e^p(\alpha)\, S(\alpha)$ eine Hermitesche Matrix. Desgleichen ist $\varphi(\alpha)$ reell für $\alpha = 1, 2, 3$, rein imaginär für $\alpha = 0$; also ist auch $\varphi(\alpha)\, S(\alpha)$ hermitesch. Folglich ist

$$\overline{\mathfrak{m}} = -\frac{1}{i}\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x_p}\, \mathfrak{S}^p \psi + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{e}^p(\alpha)}{\partial x_p} \cdot \psi^* S(\alpha)\, \psi\right) + \frac{1}{4\varepsilon} \cdot \varphi(\alpha)\, s(\alpha),$$

$$i(\mathfrak{m} - \overline{\mathfrak{m}}) = \psi^* \mathfrak{S}^p \frac{\partial \psi}{\partial x_p} + \frac{\partial \psi^*}{\partial x_p} \mathfrak{S}^p \psi + \frac{\partial \mathfrak{e}^p(\alpha)}{\partial x_p} \cdot \psi^* S(\alpha)\, \psi$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_p}(\psi^* \mathfrak{S}^p \psi) = \frac{\partial \mathfrak{s}^p}{\partial x_p}.$$

$\mathfrak{m}$ ist also in der Tat praktisch reell.

Zur speziellen Relativitätstheorie kehren wir zurück, wenn wir

$$e^0(0) = -i, \quad e^1(1) = e^2(2) = e^3(3) = 1,$$

alle übrigen $e^p(\alpha) = 0$ setzen.

§ 4. Energie. (19) sei das Wirkungsintegral für die Materie im weiteren Sinne (Materie + elektrisches Feld), welche durch die ψ und die elektromagnetischen Potentiale f_p beschrieben ist. Die Naturgesetze drücken aus, daß die Variation

$$\delta \int \mathfrak{h}\, dx = 0$$

ist, wenn die ψ und f_p willkürlichen infinitesimalen Variationen unterworfen werden, die außerhalb eines endlichen Weltgebietes verschwinden. Die Variation der ψ gibt die materiellen Gleichungen im engeren Sinne, die Variation der f_p die elektromagnetischen Gleichungen. Auf Grund dieser Naturgesetze wird, wenn man auch die $e^p(\alpha)$, die bisher festgehalten wurden, einer analogen infinitesimalen Variation unterwirft, eine Gleichung bestehen

$$\delta \int \mathfrak{h}\, dx = \int \mathfrak{t}_p(\alpha) \,.\, \delta e^p(\alpha) \,.\, dx, \tag{20}$$

durch welche die Tensordichte $\mathfrak{t}_p(\alpha)$ der Energie zu definieren ist.

Zufolge der Invarianz der Wirkungsgröße muß (20) verschwinden, wenn die Variation $\delta e^p(\alpha)$ dadurch hervorgebracht wird,

1. daß bei festgehaltenem Koordinatensystem x_p das lokale Achsenkreuz $\mathbf{e}(\alpha)$ eine infinitesimale Drehung erleidet; oder
2. daß bei festgehaltenem Achsenkreuz die Koordinaten x_p einer infinitesimalen Transformation unterworfen werden.

Der erste Vorgang ist beschrieben durch die Gleichungen

$$\delta e^p(\alpha) = o(\alpha\beta) \,.\, e_p(\beta).$$

Hierin bilden die $o(\alpha\beta)$ eine schiefsymmetrische (infinitesimale) Matrix, die willkürlich vom Orte abhängt. Und das Verschwinden von (20) sagt aus, daß

$$t(\beta, \alpha) = t_p(\alpha)\, e^p(\beta)$$

symmetrisch ist in α und β. Die Symmetrie des Energietensors ist so mit der ersten Invarianzeigenschaft äquivalent. Das Symmetriegesetz ist aber nicht identisch erfüllt, sondern eine Folge der materiellen und elektromagnetischen Gesetze. Denn bei festgehaltenem ψ-Feld werden sich ja durch die Drehung des Achsenkreuzes die Komponenten von ψ ändern!

Etwas mühsamer ist die Berechnung der durch den zweiten Prozeß hervorgebrachten Variation $\delta e^p(\alpha)$. Aber die Überlegungen sind aus der Relativitätstheorie in ihrer früheren analytischen Fassung geläufig*. Der Punkt P mit den Koordinaten x_p habe im transformierten Koordinatensystem die Koordinaten

$$x'_p = x_p + \delta x_p, \quad \delta x_p = \xi^p(x).$$

Der Punkt, der im neuen Koordinatensystem dieselben Koordinaten x_p hat wie P im alten, werde mit P' bezeichnet; er hat im alten System die Koordinaten $x_p - \delta x_p$. Der Vektor $\boldsymbol{t}$ in P wird im neuen Koordinatensystem die Komponenten

$$\frac{\partial x'_p}{\partial x_q} \cdot t^q = t_p + \frac{\partial \xi^p}{\partial x_q} \cdot t^q$$

besitzen. Insbesondere ist die Änderung, welche die Komponenten $e^p(\alpha)$ des festen Vektors $\mathbf{e}(\alpha)$ im festgehaltenen Punkt P durch die Koordinatentransformation erleiden,

$$\delta' e^p(\alpha) = \frac{\partial \xi^p}{\partial x_q} \cdot e^q(\alpha).$$

Andererseits ist der Unterschied zwischen dem Vektor $\mathbf{e}(\alpha)$ in P' und P gegeben durch

$$d e^p(\alpha) = -\frac{\partial e^p(\alpha)}{\partial x_q} \cdot \xi^q.$$

Darum ist die Variation, welche durch die Koordinatentransformation bei festgehaltenen Koordinatenwerten x_p erzeugt wird:

$$\delta e^p(\alpha) = \frac{\partial \xi^p}{\partial x_q} \cdot e^q(\alpha) - \frac{\partial e^p(\alpha)}{\partial x_q} \cdot \xi^q.$$

* Vgl. etwa H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, 5. Aufl., S. 233 ff. (zitiert als RZM). Berlin 1923.

Hier sind ξ^p willkürliche, außerhalb eines endlichen Weltgebietes verschwindende Funktionen. Setzen wir in (20) ein, so erhalten wir durch eine partielle Integration

$$0 = \int \left\{ \frac{\partial \mathfrak{t}_p^q}{\partial x_q} + \mathfrak{t}_q(\alpha) \frac{\partial e^q(\alpha)}{\partial x_p} \right\} \xi^p \, dx.$$

Der Quasi-Erhaltungssatz von Energie und Impuls ergibt sich demnach hier in der Gestalt

$$\frac{\partial \mathfrak{t}_p^q}{\partial x_q} + \frac{\partial e^q(\alpha)}{\partial x_p} \mathfrak{t}_q(\alpha) = 0. \tag{21}$$

Wegen des zweiten Gliedes ist er nur in der speziellen Relativitätstheorie ein wirklicher Erhaltungssatz. In der allgemeinen wird er erst dazu wenn die Energie des Gravitationsfeldes hinzugefügt wird.

In der speziellen Relativitätstheorie aber liefert Integration nach $d\xi = dx_1\,dx_2\,dx_3$ über den räumlichen Querschnitt

$$x_0 = t = \text{const} \tag{22}$$

die zeitlich konstanten Komponenten von Impuls (J_1, J_2, J_3) und Energie ($-J_0$):

$$J_p = \int \mathfrak{t}_p^0 \, d\xi.$$

Mit Hilfe der Symmetrie findet man ferner die Divergenzgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x_q}(x_2 \mathfrak{t}_3^q - x_3 \mathfrak{t}_2^q) = 0, \ldots,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_q}(x_0 \mathfrak{t}_1^q + x_1 \mathfrak{t}_0^q) = 0, \ldots$$

Die drei Gleichungen der ersten Art zeigen, daß das Impulsmoment (M_1, M_2, M_3) zeitlich konstant ist:

$$M_1 = \int (x_2 \mathfrak{t}_3^0 - x_3 \mathfrak{t}_2^0)\, d\xi, \ldots,$$

die Gleichungen der zweiten Art enthalten den Satz von der Trägheit der Energie.

Wir rechnen die Energiedichte aus für die oben aufgestellte Wirkungsgröße $\mathfrak{m}$ der Materie; wir behandeln die beiden Teile, in die $\mathfrak{m}$ nach (17) zerlegt erscheint, gesondert. Für den ersten Teil kommt nach einer partiellen Integration

$$\int \delta \mathfrak{m} \,.\, dx = \int u_p(\alpha)\, \delta e^p(\alpha) \,.\, dx$$

mit

$$i\, u_p(\alpha) = \psi^* S(\alpha) \frac{\partial \psi}{\partial x_p} - \frac{1}{2} \frac{\partial(\psi^* S(\alpha) \psi)}{\partial x_p},$$

$$= \frac{1}{2}\left(\psi^* S(\alpha) \frac{\partial \psi}{\partial x_p} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x_p} S(\alpha) \psi\right).$$

Der hieraus entspringende Teil der Energie ist darum

$$\mathfrak{t}_p(\alpha) = \mathfrak{u}_p(\alpha) - e_p(\alpha)\,.\,\mathfrak{u}, \quad \mathfrak{t}_p^q = \mathfrak{u}_p^q - \delta_p^q\,\mathfrak{u},$$

wo $\mathfrak{u}$ die Verkürzung $e^p(\alpha)\,\mathfrak{u}_p(\alpha)$ bedeutet. Diese Formeln sind allgemein auch für nichtkonstante $e^p(\alpha)$ richtig. Im zweiten Teil beschränken wir uns aber der Einfachheit halber auf die spezielle Relativität. Für ihn ist dann

$$\int \delta\,\mathfrak{m}\,.\,dx = \frac{1}{4i}\int \left| e_p(\alpha),\ e^q(\alpha),\ \frac{\partial(\delta\,e^p(\alpha))}{\partial x_q},\ \mathfrak{s}(\alpha) \right| dx,$$

$$= -\frac{1}{4i}\int \left| \delta\,e^p(\alpha),\ e_p(\alpha),\ e^q(\alpha),\ \frac{\partial\,\mathfrak{s}(\alpha)}{\partial x_q} \right| dx,$$

$$\mathfrak{t}_p(0) = -\frac{1}{4i}\left| e_p(\alpha),\ e^q(\alpha),\ \frac{\partial\,\mathfrak{s}(\alpha)}{\partial x_q} \right|_{\alpha = 1,2,3}.$$

$\mathfrak{t}_p^0$ entsteht daraus durch Multiplikation mit $-i$; somit $\mathfrak{t}_0^0 = 0$ und

$$\mathfrak{t}_1^0 = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\,\mathfrak{s}(3)}{\partial x_2} - \frac{\partial\,\mathfrak{s}(2)}{\partial x_3}\right). \tag{23}$$

Wir vereinigen beide Bestandteile, um totale Energie, Impuls und Impulsmoment zu bestimmen. Aus

$$\mathfrak{t}_0^0 = -\frac{1}{2i}\sum_{p=1}^{3}\left(\psi^* S^p \frac{\partial\psi}{\partial x_p} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x_p} S^p \psi\right)$$

ergibt sich nach einer auf den Subtrahenden ausgeübten partiellen Integration

$$-J_0 = -\int \mathfrak{t}_0^0\,d\xi = \frac{1}{i}\int \psi^*\cdot\sum_{p=1}^{3} S^p \frac{\partial\psi}{\partial x_p}\cdot d\xi.$$

Dies führt dazu zurück, den Operator

$$\frac{1}{i}\sum_{p=1}^{3} S^p \frac{\partial}{\partial x_p}$$

als Repräsentanten der Energie einer freien Partikel anzusetzen. Ferner wird

$$J_1 = \int \mathfrak{t}_1^0\,d\xi = \frac{1}{2i}\int\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x_1}\psi\right)d\xi$$

$$= \frac{1}{i}\int \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\,d\xi.$$

Das Glied (23) liefert zum Integral keinen Beitrag. Der Impuls wird, wie es nach Schrödinger sein muß, durch den Operator

$$\frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

dargestellt. Aus dem vollständigen Ausdruck von

$$x_2 \mathfrak{t}_3^0 - x_3 \mathfrak{t}_2^0$$

erhält man schließlich durch geeignete partielle Integrationen

$$M_1 = \int \left\{ \frac{1}{i} \psi^* \left(x_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} s(1) \right\} d\xi.$$

Im Einklang mit bekannten Formeln ist also M_1 repräsentiert durch den Operator

$$\frac{1}{i} \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} S(1).$$

Nachdem man den Spin von Anbeginn in die Theorie hineingesteckt hat, muß er natürlich hier wieder zum Vorschein kommen; es ist aber doch recht überraschend und instruktiv, wie das zustande kommt. Die grundlegenden Ansätze der Quantentheorie haben hiernach einen weniger prinzipiellen Charakter, als man wohl ursprünglich angenommen hatte. Sie sind an die spezielle Wirkungsgröße $\mathfrak{m}$ gebunden. Andererseits bestätigt dieser Zusammenhang die Unersetzbarkeit von $\mathfrak{m}$ in seiner Rolle als Wirkung der Materie. Nur die allgemeine Relativitätstheorie, die durch ihre freie Veränderlichkeit der $e^p(\alpha)$ zu einer willkürfreien Definition der Energie führt, erlaubt uns, in der geschilderten Weise den Zirkel der Quantentheorie zu schließen.

§ 5. Gravitation. Wir nehmen die Transkription von Einsteins klassischer Gravitationstheorie wieder auf und bestimmen zunächst den Riemannschen Krümmungstensor*. Von dem Punkte P führen die Linienelemente d und δ nach P_d und P_δ. Das Linienelement δ wird irgendwie nach P_d, d nach P_δ so überführt, daß sie sich in einer gemeinsamen, P gegenüberliegenden Ecke P^* eines infinitesimalen „Parallelogramms" treffen. Das Achsenkreuz $\mathbf{e}(\alpha)$ in P wird einmal auf dem Wege $P P_d P^*$, ein andermal auf dem Wege $P P_\delta P^*$ nach P^* parallel übertragen. Die beiden normalen Achsenkreuze, die man so in P^* erhält, gehen durch eine infinitesimale Drehung

$$P_{pq} (dx)^p (\delta x)^q = \tfrac{1}{2} P_{pq} (\Delta x)^{pq}$$

auseinander hervor, wo

$$(\Delta x)^{pq} = (dx)^p (\delta x)^q - (\delta x)^p (dx)^q$$

die Komponenten des von dx und δx aufgespannten Flächenelements sind und P_{pq} schiefsymmetrisch ist in bezug auf p und q. P_{pq} ist eine schiefsymmetrische Matrix $\| r_{pq}(\alpha\beta) \|$; das ist der Riemannsche Krümmungstensor.

* Vgl. RZM, S. 119f.

Die Drehung, welche das auf dem ersten Wege nach P^* parallel verschobene Achsenkreuz $\mathbf{e}^*(\alpha)$ aus dem lokalen Achsenkreuz $\mathbf{e}(\alpha)$ in P^* erzeugt, ist in einer leicht verständlichen Bezeichnung

$$(1 + d\,\Omega)\bigl(1 + \delta\,\Omega(P_d)\bigr).$$

Die Differenz dieses Ausdrucks und desjenigen, der daraus durch Vertauschung von d und δ hervorgeht, ist

$$= \{\,d(\delta\,\Omega) - \delta(d\,\Omega)\} + (d\,\Omega\,.\,\delta\,\Omega - \delta\,\Omega\,.\,d\,\Omega).$$

$$d\,\Omega \text{ ist } = \Omega_p\,(d\,x)^p,$$

$$\delta\,(d\,\Omega) = \frac{\partial\,\Omega_p}{\partial\,x_q}\,\delta\,x_q\,d\,x_p + \Omega_p\,\delta\,d\,x_p.$$

Weil das Parallelogramm sich schließt, ist $\delta\,d\,x_p = d\,\delta\,x_p$; darum schließlich

$$P_{p\,q} = \left(\frac{\partial\,\Omega_q}{\partial\,x_p} - \frac{\partial\,\Omega_p}{\partial\,x_q}\right) + (\Omega_p\,\Omega_q - \Omega_q\,\Omega_p).$$

Zur skalaren Krümmung

$$r = e^p(\alpha)\,e^q(\beta)\,r_{p\,q}(\alpha\,\beta)$$

liefert der erste, differentiierte Bestandteil den Beitrag

$$\bigl(e^q(\alpha)\,e^p(\beta) - e^q(\beta)\,e^p(\alpha)\bigr)\,\frac{\partial\,o_p(\alpha\,\beta)}{\partial\,x_q}.$$

In $\mathfrak{r} = \dfrac{r}{\varepsilon}$ liefert er, unter Vernachlässigung einer vollständigen Divergenz, die beiden Glieder

$$-\,2\,o\,(\beta,\,\alpha\,\beta)\,\frac{\partial\,\mathfrak{e}^q(\alpha)}{\partial\,x_q}$$

und

$$\frac{1}{\varepsilon}\,o_p(\alpha\,\beta)\left\{\frac{\partial\,e^p(\alpha)}{\partial\,x_q}\,e^q(\beta) - \frac{\partial\,e^p(\beta)}{\partial\,x_q}\,e^q(\alpha)\right\}.$$

Das erste ist nach (12)

$$= -\,2\,o\,(\beta;\,\varrho\,\beta)\,o\,(\alpha;\,\alpha\,\varrho),$$

das zweite nach (10)

$$= 2\,o\,(\alpha;\,\beta\,\gamma)\,.\,o\,(\gamma;\,\alpha\,\beta).$$

Das Resultat ist der folgende Ausdruck für die Wirkungsdichte $\mathfrak{g}$ der Gravitation

$$\varepsilon\,\mathfrak{g} = o\,(\alpha;\,\beta\,\gamma)\,.\,o\,(\gamma;\,\alpha\,\beta) + o\,(\alpha;\,\alpha\,\gamma)\,.\,o\,(\beta;\,\beta\,\gamma). \tag{24}$$

Das Integral $\int \mathfrak{g}\,d\,x$ ist nicht wirklich, aber praktisch invariant, $\mathfrak{g}$ unterscheidet sich von der skalaren Dichte $\mathfrak{r}$ um eine Divergenz.

Variation der $e^p(\alpha)$ in dem totalen Wirkungsintegral

$$\int (\mathfrak{g} + \varkappa\,\mathfrak{h})\,d\,x$$

liefert die Gravitationsgleichungen ($\varkappa$ ist eine numerische Konstante).

Die Gravitationsenergie $\mathfrak{v}_p^q$ erhält man aus $\mathfrak{g}$, wenn man im Koordinatenraum eine infinitesimale Verschiebung vornimmt*:

$$x'_p = x_p + \xi^p, \quad \xi^p = \text{const.}$$

Die dadurch hervorgebrachte Variation

$$\delta\, \mathbf{e}(\alpha) \text{ ist } = -\frac{\partial\, \mathbf{e}(\alpha)}{\partial x_p} \cdot \xi^p.$$

$\mathfrak{g}$ ist eine Funktion von $e^p(\alpha)$ und den Ableitungen $e_q^p(\alpha) = \frac{\partial e^p(\alpha)}{\partial x_q}$; das totale Differential sei mit

$$\delta\, \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_p(\alpha)\, \delta\, e^p(\alpha) + \mathfrak{g}_p^q(\alpha)\, \delta\, e_q^p(\alpha)$$

bezeichnet. Für die durch die infinitesimale Translation im Koordinatenraum hervorgerufene Änderung muß

$$\int \delta\, \mathfrak{g} \cdot dx + \int \frac{\partial\, \mathfrak{g}}{\partial x_p}\, \xi^p \cdot dx = 0 \tag{25}$$

gelten; das Integral erstreckt sich über ein beliebiges Stück der Welt.

$$\int \delta\, \mathfrak{g} \cdot dx = \int \left(\mathfrak{g}_p(\alpha) - \frac{\partial\, \mathfrak{g}_p^q(\alpha)}{\partial x_q}\right) \delta\, e^p(\alpha) \cdot dx + \int \frac{\partial\left(\mathfrak{g}_p^q(\alpha)\, \delta\, e^p(\alpha)\right)}{\partial x_q}\, dx.$$

Nach den Gravitationsgleichungen ist die Klammer im ersten Integral $= -\varkappa\, \mathfrak{t}_p(\alpha)$, das Integral selbst

$$= -\varkappa \int \mathfrak{t}_q(\alpha)\, \frac{\partial e^q(\alpha)}{\partial x_p} \cdot \xi^p\, dx.$$

Man führe

$$\mathfrak{v}_p^q = \delta_p^q\, \mathfrak{g} - \frac{\partial e^r(\alpha)}{\partial x_p} \cdot \mathfrak{g}_r^q(\alpha)$$

ein. Gleichung (25) besagt, daß das über ein beliebiges Weltstück erstreckte Integral von

$$\left(\mathfrak{v}_p^q - \varkappa\, \mathfrak{t}_q(\alpha)\, \frac{\partial e^q(\alpha)}{\partial x_p}\right) \xi^p$$

Null ist. Der Integrand muß darum überall verschwinden. Da die ξ^p beliebige Konstanten sind, sind die Faktoren von ξ^p einzeln Null. So verwandelt sich (21) in die reine Divergenzgleichung

$$\frac{\partial\left(\mathfrak{v}_p^q + \varkappa\, \mathfrak{t}_p^q\right)}{\partial x_q} = 0,$$

und $\mathfrak{v}_p^q/\varkappa$ erweist sich als Gravitationsenergie.

Um daneben einen wirklichen differentiellen Erhaltungssatz des Impulsmoments in der allgemeinen Relativitätstheorie formulieren zu

---

* Vgl. RZM, S. 272f.

können, muß man die Koordinaten so spezialisieren, daß die kongrediente Drehung aller Achsenkreuze als eine orthogonale Transformation der Koordinaten erscheint. Dies ist sicher möglich, doch gehe ich hier darauf nicht näher ein.

§ 6. Elektrisches Feld. Wir kommen jetzt zu dem kritischen Teil der Theorie. Meiner Meinung nach liegt der Ursprung und die Notwendigkeit des elektromagnetischen Feldes in folgendem begründet. Die Komponenten ψ_1, ψ_2 sind in Wahrheit nicht eindeutig durch das Achsenkreuz bestimmt, sondern nur insoweit, daß sie noch mit einem beliebigen „Eichfaktor" $e^{i\lambda}$ vom absoluten Betrag 1 multipliziert werden können. Nur bis auf einen solchen Faktor ist die Transformation bestimmt, welche die ψ unter dem Einfluß einer Drehung des Achsenkreuzes erleiden. In der speziellen Relativitätstheorie muß man diesen Eichfaktor als eine Konstante ansehen, weil wir hier ein einziges, nicht an einen Punkt gebundes Achsenkreuz haben. Anders in der allgemeinen Relativitätstheorie: jeder Punkt hat sein eigenes Achsenkreuz und darum auch seinen eigenen willkürlichen Eichfaktor; dadurch, daß man die starre Bindung der Achsenkreuze in verschiedenen Punkten aufhebt, wird der Eichfaktor notwendig zu einer willkürlichen Ortsfunktion. Dann ist aber auch die infinitesimale lineare Transformation dE der ψ, welche der infinitesimalen Drehung $d\Omega$ entspricht, nicht vollständig festgelegt, sondern dE kann um ein beliebiges rein imaginäres Multiplum $i\,.\,df$ der Einheitsmatrix vermehrt werden. Zur eindeutigen Festlegung des kovarianten Differentials $\delta\psi$ von ψ hat man also außer der Metrik in der Umgebung des Punktes P ein solches df für jedes von P ausgehende Linienelement $\overrightarrow{PP'} = (dx)$ nötig. Damit $\delta\psi$ nach wie vor linear von dx abhängt, muß

$$df = f_p\,(dx)^p$$

eine Linearform in den Komponenten des Linienelements sein. Ersetzt man ψ durch $e^{i\lambda}\,.\,\psi$, so muß man zugleich, wie aus der Formel für das kovariante Differential hervorgeht, df ersetzen durch $df - d\lambda$.

Dies hat zur Folge, daß zur Wirkungsdichte $\mathfrak{m}$ das Glied

$$\frac{1}{\varepsilon} f(\alpha)\, s(\alpha) = \frac{1}{\varepsilon} f(\alpha)\,.\,\psi^* S(\alpha)\,\psi = f_p\,.\,\psi^* \mathfrak{S}^p\,\psi \tag{26}$$

zu addieren ist. $\mathfrak{m}$ bedeutet fortan die so ergänzte Wirkungsgröße. Es herrscht notwendig Eichinvarianz in dem Sinne, daß die Wirkungsgröße ungeändert bleibt, wenn

$$\psi \text{ durch } e^{i\lambda}\,.\,\psi, \quad f_p \text{ durch } f_p - \frac{\partial\lambda}{\partial x_p}$$

ersetzt wird, unter λ eine willkürliche Ortsfunktion verstanden. Genau in der durch (26) beschriebenen Weise wirkt nach der Erfahrung das elektromagnetische Potential auf die Materie. Wir sind daher berechtigt, die hier eingeführten Größen f_p mit den Komponenten jenes Potentials zu identifizieren. Der Beweis ist vollkommen, wenn wir zeigen, daß auch umgekehrt das f_p-Feld nach denselben Gesetzen von der Materie beeinflußt wird, welche nach der Erfahrung für das elektromagnetische Potentialfeld gelten.

$$f_{pq} = \frac{\partial f_q}{\partial x_p} - \frac{\partial f_p}{\partial x_q}$$

ist ein eichinvarianter schiefsymmetrischer Tensor und

$$\mathfrak{l} = \frac{1}{4} f_{pq} \mathfrak{f}^{pq} \tag{27}$$

die für die Maxwellsche Theorie charakteristische skalare Dichte. Der Ansatz

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{m} + a\,\mathfrak{l} \tag{28}$$

(a eine numerische Konstante) liefert durch Variation der f_p die Maxwellschen Gleichungen mit

$$-\mathfrak{s}^p = -\psi^* \mathfrak{S}^p \psi \tag{29}$$

als der Dichte des elektrischen Viererstroms.

Die Eichinvarianz steht in engem Zusammenhang mit dem Erhaltungssatz für die Elektrizität. Weil $\mathfrak{h}$ eichinvariant ist, muß $\delta\int \mathfrak{h}\,dx$ identisch verschwinden, wenn bei festgehaltenen $e^p(\alpha)$ die ψ und f_p gemäß

$$\delta\psi = i\lambda\,.\,\psi, \qquad \delta f_p = -\frac{\partial \lambda}{\partial x_p}$$

variiert werden; λ ist eine willkürliche Ortsfunktion. Dies liefert eine identisch erfüllte Relation zwischen den materiellen und den elektromagnetischen Gleichungen. Wissen wir, daß die materiellen Gleichungen (im engeren Sinne) gelten, so folgt also daraus

$$\delta\int \mathfrak{h}\,dx = 0,$$

wenn nur die f_p gemäß der Gleichung $\delta f_p = -\partial\lambda/\partial x_p$ variiert werden. Andererseits folgt aus den elektromagnetischen Gleichungen dasselbe für die infinitesimale Variation $\delta\psi = i\lambda\,.\,\psi$ der ψ allein. Wenn $\mathfrak{h} = \mathfrak{m} + a\,\mathfrak{l}$, erhält man beide Male

$$\int \delta\mathfrak{h}\,.\,dx = \pm\int \psi^* \mathfrak{S}^p \psi \cdot \frac{\partial\lambda}{\partial x_p}\,dx = \mp\int \lambda\,\frac{\partial \mathfrak{s}^p}{\partial x_p}\,dx.$$

Eine analoge Sachlage fanden wir vor beim Erhaltungssatz von Energieimpuls und Impulsmoment. Sie verknüpften die materiellen Gleichungen im weiteren Sinne mit den Gravitationsgleichungen und korrespondierten der Invarianz gegenüber Koordinatentransformationen bzw. gegenüber willkürlichen unabhängigen Drehungen der lokalen Achsenkreuze in den verschiedenen Weltpunkten.

Aus
$$\frac{\partial \mathfrak{s}^p}{\partial x_p} = 0 \tag{30}$$
ergibt sich, daß der Fluß der Vektordichte $\mathfrak{s}^p$ durch einen dreidimensionalen Querschnitt der Welt, insbesondere durch einen Querschnitt (22)
$$l = \int \mathfrak{s}^0 \, d\xi \tag{31}$$
von der Lage des Querschnitts bzw. von t unabhängig ist. Nicht nur dieses Integral, sondern auch das einzelne Integralelement hat eine invariante Bedeutung; immerhin hängt das Vorzeichen davon ab, welcher Richtungssinn als eine positive Überquerung des dreidimensionalen Schnitts gerechnet wird. Um $\mathfrak{s}^0 d\xi$ als räumliche Wahrscheinlichkeitsdichte ansprechen zu können, muß die Hermitesche Form
$$e^0(\alpha) \,.\, \psi^* S(\alpha)\, \psi \tag{32}$$
von ψ_1, ψ_2 definit sein. Man findet leicht, daß dies dann der Fall ist, wenn (22) wirklich ein räumlicher Querschnitt in P ist, wenn die in ihm liegenden, von P ausgehenden Linienelemente raumartig sind. Damit (32) das positive Vorzeichen bekommt, müssen die Querschnitte $x_0 = \text{const}$, nach wachsendem x_0 geordnet, in der durch den Vektor $\mathbf{e}(0)/i$ angezeigten Richtung der Zukunft aufeinanderfolgen. Unter diesen sich hier naturgemäß ergebenden Einschränkungen des Koordinatensystems ist auch das Vorzeichen des Flusses festgelegt, und die Invariante (31) werde in der üblichen Weise durch die Bedingung
$$l \equiv \int \mathfrak{s}^0 \, d\xi = 1 \tag{33}$$
normiert. Die $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{l}$ miteinander kombinierende Konstante a ist dann eine reine Zahl $= ch/e^2$ (reziproke Feinstrukturkonstante).

Wir behandeln ψ_1, ψ_2; f_p; $e^p(\alpha)$ als die unabhängig voneinander zu variierenden Größen. Die aus $\mathfrak{m}$ entspringende Energiedichte $\mathfrak{t}_p^q$ muß wegen des Ergänzungsgliedes (26) um
$$f_p \mathfrak{s}^q - \delta_p^q (f_r \mathfrak{s}^r)$$
vermehrt werden. Das führt dazu, in der speziellen Relativitätstheorie der Energie den Operator
$$H = \sum_{p=1}^{3} S^p \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_p} + f_p \right)$$
zuzuordnen, da
$$\int \psi^* . H \psi . d\xi$$

ihr Wert ist. Die materiellen Gleichungen lauten dann freilich

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_0} + f_0\right)\psi + H\psi = 0 \quad \text{und nicht} \quad \frac{1}{i}\frac{\partial \psi}{\partial x_0} + H\psi = 0,$$

wie es bisher in der Quantenmechanik angenommen wurde. Natürlich tritt zu der materiellen Energie die elektromagnetische hinzu, für welche die klassischen Ausdrücke Maxwells ihre Gültigkeit behalten.

Was die physikalischen Dimensionen betrifft, so ist es bei allgemeiner Relativität natürlich, die Koordinaten x_p als reine Zahlen anzusetzen. Die auftretenden Größen sind nicht nur invariant gegenüber Maßstabsänderung, sondern gegenüber beliebigen Transformationen der x_p. Werden alle $\mathbf{e}(\alpha)$ durch Multiplikation mit einer Konstante b in $b \cdot \mathbf{e}(\alpha)$ verwandelt, so muß, wenn die Normierung (33) aufrechterhalten wird, gleichzeitig ψ durch $b^{3/2} \cdot \psi$ ersetzt werden. $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{l}$ werden dadurch nicht verändert, sind also reine Zahlen. Dagegen nimmt $\mathfrak{g}$ den Faktor $1/b^2$ an, so daß $\varkappa$ das Quadrat einer Länge d ist. $\varkappa$ ist nicht identisch mit der Einsteinschen Gravitationskonstante, sondern entsteht aus ihr durch Multiplikation mit $2\,h/c$. d liegt weit unter der atomaren Größenordnung, es ist $\sim 10^{-32}$ cm. So wird auch hier die Gravitation nur für die astronomischen Probleme von Bedeutung sein.

Sehen wir vom Gravitationsglied ab, so enthalten die Feldgleichungen keine dimensionierte Atomkonstante. Für eine Wirkungsgröße wie das Glied in der Diracschen Theorie, das die Masse als Faktor trägt*, ist in der Zweikomponententheorie kein Platz. Aber man weiß, wie auf Grund der Erhaltungssätze die Masse eingeführt werden kann. Man nehme an, daß in der „leeren Umwelt" des Teilchens, außerhalb eines gewissen Weltkanals, dessen Querschnitte $x_0 = \text{const}$ von endlicher Ausdehnung sind, die $\mathfrak{t}_p^q$ verschwinden und die $e^p(\alpha)$ die konstanten Werte der speziellen Relativität annehmen. Dann sind

$$J_p = \int \left(\mathfrak{t}_p^0 + \frac{1}{\varkappa}\mathfrak{v}_p^0\right) d\xi$$

die Komponenten eines von der Willkür des Koordinatensystems und der lokalen Achsenkreuze nicht beeinflußten, zeitlich konstanten Vierervektors in der Umwelt. Das normale Koordinatensystem daselbst kann genauer festgelegt werden durch die Bedingung, daß der Impuls (J_1, J_2, J_3) verschwindet; dann ist $-J_0$ die invariante und zugleich konstante Masse des Teilchens. Es werde nun verlangt, daß diese Masse einen ein für allemal vorgegebenen Wert m hat.

* Proc. Roy. Soc. (A) **117**, 610.

Neben der hier besprochenen Theorie des elektromagnetischen Feldes, die ich für die richtige halte, weil sie so natürlich aus der Willkürlichkeit des Eichfaktors in ψ entspringt und darum die erfahrungsgemäß bestehende Eichinvarianz in Zusammenhang mit dem Erhaltungssatz für die Elektrizität verstehen läßt, bietet sich noch eine andere dar, welche die Elektrizität mit der Gravitation verknüpft. Das Glied (26) hat die gleiche Form wie der zweite Teil von $\mathfrak{m}$, Formel (17); $\varphi(\alpha)$ spielt in diesem die gleiche Rolle wie $f(\alpha)$ in jenem. Man mag daher erwarten, daß Materie und Gravitation, ψ und $e^p(\alpha)$, für sich schon ausreichen, die elektromagnetischen Erscheinungen zu erklären, indem man die Größen $\varphi(\alpha)$ als die elektromagnetischen Potentiale anspricht. Jene Größen hängen so von den $e^p(\alpha)$ und ihren ersten Ableitungen ab, daß Invarianz stattfindet gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen. Was aber die Drehungen der Achsenkreuze anlangt, so transformieren sich die $\varphi(\alpha)$ nur dann wie die Komponenten eines festen Vektors im Achsenkreuz, wenn die Achsenkreuze in allen Punkten derselben Drehung unterworfen werden. Ignoriert man das Materiefeld und achtet nur auf den Zusammenhang von Elektrizität und Gravitation, so kommt man also auf eine Theorie der Elektrizität genau von der gleichen Art, wie sie Einstein neuerdings versucht hat. Immerhin wäre hier der Fernparallelismus nur vorgetäuscht.

Ich habe mich überzeugt, daß man durch diesen vielleicht zunächst verlockenden Ansatz nicht zu den Maxwellschen Gleichungen gelangt. Ferner bliebe die Eichinvarianz ganz rätselhaft; das elektromagnetische Potential selbst und nicht bloß die Feldstärke hätte physikalische Bedeutung. Darum glaube ich, daß diese Idee auf einen Holzweg führt, daß wir vielmehr dem Fingerzeig zu trauen haben, den uns die Eichinvarianz gab: die Elektrizität ein Begleitphänomen des materiellen Wellenfeldes und nicht der Gravitation.

Palmer Physical Laboratory, Princeton University, 19. April 1929.