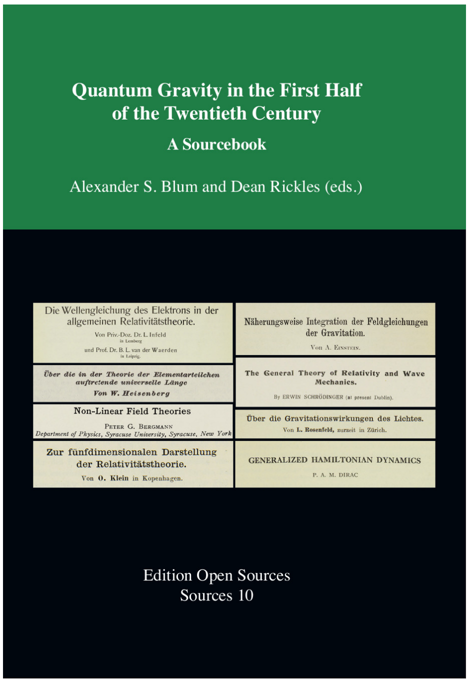
Edition Open Sources
Sources 10

Alexander S. Blum and Dean Rickles:

Léon Rosenfeld (1930): Zur Quantelung der Wellenfelder

DOI: 10.34663/9783945561317-20



In: Alexander S. Blum and Dean Rickles (eds.): *Quantum Gravity in the First Half of the Twentieth Century : A Sourcebook*
Online version at https://edition-open-sources.org/sources/10/

ISBN 978-3-945561-31-7, DOI 10.34663/9783945561317-00
First published 2018 by Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften, Edition Open

The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at http://dnb.d-nb.de

Chapter 18
Léon Rosenfeld (1930): Zur Quantelung der Wellenfelder

Léon Rosenfeld (1930). Zur Quantelung der Wellenfelder. *Annalen der Physik*, 397: 113–152.

Zur Quantelung der Wellenfelder

Von L. Rosenfeld

Einleitung

Wesentliche Fortschritte in der Formulierung der allgemeinen Quantengesetze der elektromagnetischen und materiellen Wellenfelder haben neuerdings Heisenberg und Pauli[1]) erzielt, indem sie die von Dirac erfundene „Methode der nochmaligen Quantelung" systematisch entwickelten. Neben gewissen sachlichen Schwierigkeiten, die viel tiefer liegen, trat dabei eine eigentümliche Schwierigkeit formaler Natur auf: der zum skalaren Potential kanonisch konjugierte Impuls verschwindet identisch, so daß die Aufstellung der Hamiltonschen Funktion und der Vertauschungsrelationen nicht ohne weiteres gelingt. Zur Beseitigung dieser Schwierigkeit sind bisher drei Methoden vorgeschlagen worden, die zwar ihren Zweck erfüllen, aber doch schwerlich als befriedigend betrachtet werden können.

1. Die erste Heisenberg-Paulische Methode ist ein rein analytischer Kunstgriff.[2]) Man fügt zur Lagrangefunktion gewisse Zusatzglieder hinzu, die mit einem kleinen Parameter ε multipliziert sind und bewirken, daß der obenerwähnte Impuls nicht mehr verschwindet. In den Schlußresultaten muß man dann zum Limes $\varepsilon = 0$ übergehen. Die ε-Glieder führen aber zu unphysikalischen Rechenkomplikationen[3]) und zerstören die charakteristische Invarianz der Lagrangefunktion gegenüber der Eichinvarianzgruppe.

2. Die zweite Heisenberg-Paulische Methode[4]) benutzt hingegen wesentlich diese Invarianz. Dem skalaren Potential

1) W. Heisenberg u. W. Pauli, Ztschr. f. Phys. **56**. S. 1. 1929; ebenda **59**. S. 168. 1930. Im folgenden mit H. P. I bzw. II zitiert.

2) H. P. I, S. 24—26, 30ff.

3) Vgl. L. Rosenfeld, Ztschr. f. Phys. **58**. S. 540. 1929.

4) H. P. II.

wird ein bestimmter, beliebiger Wert, z. B. Null, gegeben; dann liefert die Hamiltonsche Methode eine Bewegungsgleichung weniger. Lautet nun die fehlende Gleichung $C = 0$, so findet man auf Grund der Eichinvarianz der Hamiltonfunktion $C =$ konst. Die Wahl des Wertes 0 für diese Konstante bedeutet die Beschränkung auf eines von verschiedenen untereinander nicht kombinierenden Termsystemen. Das Auszeichnen einer Komponente des Viererpotentials bringt aber mit sich die Notwendigkeit eines Beweises für die relativistische Kovarianz des Verfahrens; und dieser Nachweis ist sehr mühsam.

3. Die Fermische Methode[1]) besteht auch im Hinzufügen von Zusatzgliedern zur Lagrangefunktion derart, daß kein Impuls mehr identisch verschwindet. Damit die so erhaltenen Feldgleichungen mit den gewöhnlichen übereinstimmen, müssen gewisse Nebenbedingungen erfüllt sein; es muß dann gezeigt werden, daß, wenn diese Nebenbedingungen auf einem Schnitt $t =$ const gelten, sie sich dann von selbst im Laufe der Zeit fortpflanzen. Der Nachteil dieser Methode ist der, daß wiederum die Eichinvarianz zerstört wird.

Nun ist das identische Verschwinden der genannten Impulskomponente keineswegs eine vereinzelte Erscheinung; denn der Grund dafür ist eben die Eichinvarianz der Lagrangefunktion, wie eine leichte, weiter unten ausführlich dargelegte Überlegung zeigt. Analoges, d. h. allgemeiner das Auftreten von identischen Relationen zwischen den Variablen und den konjugierten Impulsen, ist in allen Fällen zu erwarten, wenn die Lagrangefunktion eine geeignet gebaute Gruppe gestattet. Bei der näheren Untersuchung dieser Verhältnisse an Hand des besonders lehrreichen Beispieles der Gravitationstheorie, wurde ich nun von Prof. Pauli auf das Prinzip einer neuen Methode freundlichst hingewiesen, die es in durchaus einfacher und natürlicher Weise gestattet, das Hamiltonsche Verfahren beim Vorhandensein von Identitäten auszubilden, ohne den Nachteilen der bisherigen Methoden ausgesetzt zu sein. Im folgenden wird der Gegenstand zunächst vom all-

1) Vgl. H. P. II, S. 171, Fußnote.

gemeinen gruppentheoretischen Standpunkt behandelt, sodann an Hand verschiedener physikalischer Beispiele illustriert.[1])

Erster Teil: **Allgemeine Theorie**

§ 1. Ansätze über die Lagrange-Funktion und die zugrunde gelegte Gruppe

Wir betrachten irgendein dynamisches System, definiert durch Feldgrößen $Q_\alpha\ (x^1, x^2, x^3, x^4)$, welche von den Raumkoordinaten x^1, x^2, x^3 und von der Zeitkoordinate $x^4 = ct$ (und *nicht*, wie bei H. P., $x^4 = ict$!) abhängen. Über die Lagrangefunktion $\mathfrak{L}\ (Q;\ \partial Q / \partial x)$ brauchen wir keine Annahme zu machen, solange wir im Rahmen der klassischen Theorie bleiben, d. h. mit lauter c-Zahlen operieren; betrachten wir aber die Variabeln Q_α als q-Zahlen (während die Raumzeitkoordinaten immer c-Zahlen bleiben), so müssen wir berücksichtigen, daß der Satz von der Ableitung einer Funktionenfunktion seine allgemeine Gültigkeit verliert[2]); wollen wir also (und das wird der Fall sein) gewisse Eigenschaften der Lagrangefunktion, die aus diesem Satz fließen, beibehalten, so sind wir genötigt, über die Funktion $\mathfrak{L}$ solche einschränkenden Annahmen zu machen, daß die betreffenden Eigenschaften trotz des Versagens des genannten Satzes gültig bleiben. Es zeigt sich nun, daß diese Einschränkungen zwar vom mathematischen Standpunkt sehr weitgehend sein müssen, daß sie jedoch bei den physikalisch interessanten Lagrangefunktionen erfüllt sind. Sie betreffen einmal die analytische Beschaffenheit der Lagrangefunktion: diese soll höchstens quadratisch in den Ableitungen der Q_α sein; ferner die Reihenfolge der miteinander nicht vertauschbaren Größen.

Zur Abkürzung schreiben wir oft $Q_{\alpha,\nu}$ statt $\dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial x^\nu}$, auch $\dot{Q}_\alpha$ statt $Q_{\alpha,4} \equiv \dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial x^4}$. Ferner unterdrücken wir die Summa-

1) Hier möchte ich ein für allemal betonen, daß die in den Arbeiten H. P. I und II behandelten Spezialfälle mir oft den Weg zur gewünschten Verallgemeinerung zeigten. Es hätte wenig Zweck, im folgenden jedesmal darauf hinzuweisen.

2) Vgl. H. P. I, S. 18, ferner S. 14, Fußnote 1.

tionszeichen gemäß der bekannten Regel. Mit diesen Festsetzungen lautet nun unser Ansatz für die Lagrangefunktion:

$$(1)\quad 2\mathfrak{L} = Q_{\alpha,\nu}\,\mathfrak{A}^{\alpha\nu,\,\beta\mu}(Q)\,Q_{\beta,\mu} + Q_{\alpha,\nu}\,\mathfrak{B}^{\alpha\nu}(Q) + \mathfrak{B}^{\alpha\nu}(Q)\,Q_{\alpha,\nu} + \mathfrak{C}(Q).$$

Obwohl nur die $\dot{Q}_\alpha$ mit den Q_α nicht vertauschbar sind, müssen wir doch auch für die anderen Ableitungen an einer bestimmten Reihenfolge festhalten; denn gewisse Operationen, z. B. d/dx^4, verwandeln die betreffenden Größen in andere, die untereinander nicht mehr vertauschbar sind, so daß das Resultat einer solchen Operation von der ursprünglichen Reihenfolge abhängt.

Da die c-Zahlüberlegungen oft an Allgemeinheit und Eleganz überlegen sind, wollen wir sie im folgenden zuweilen zur ersten Übersicht benutzen und nachher die für die q-Zahltheorie erforderlichen Modifikationen andeuten. Um aber unnötige Wiederholungen zu vermeiden, reden wir auch bei c-Zahlen von Vertauschungsrelationen, wobei wir natürlich die korrespondierenden Poissonschen Klammersymbole meinen.

Nun zur Definition der Transformationsgruppe, welche die Lagrangefunktion (in einem näher zu präzisierenden Sinne) gestatten soll. Es liegt uns in dieser Untersuchung keineswegs daran, die größtmögliche Allgemeinheit anzustreben, sondern die Darstellung nur so allgemein zu halten, daß in den physikalischen Anwendungen die tieferen Zusammenhänge klar hervortreten. Wir fragen also nicht nach der allgemeinsten Gruppe, die bei gegebener Lagrangefunktion Identitäten von der oben besprochenen Art zur Folge hat, sondern wir legen eine speziellere, wenn auch ausgedehnte, Klasse von kontinuierlichen unendlichen Gruppen zugrunde, von der wir zeigen, daß sie bei beliebiger Lagrangeschen (c-Zahl-)Funktion zu Identitäten führen.[1])

Wir charakterisieren unsere Gruppe durch ihre infinitesimale Transformation; wir nehmen an, daß sich sowohl die x^ν wie die Q_α auf bestimmte Weise transformieren, und zwar

---

1) Die dabei benutzte Methode gibt übrigens sofort die Antwort auf die eben aufgeworfene allgemeine Frage. Bei speziellem Bau der Lagrangefunktion braucht die Gruppe sogar nicht unendlich zu sein, um Identitäten zu bedingen.

hängen die δx^ν bzw. δQ_α ab von r_0 willkürlichen reellen Funktionen $\xi^r(x)$ $(r = 1, 2, \ldots r_0)$ und ihren Ableitungen bis zur Ordnung k bzw. j; die Koeffizienten dieser Ableitungen sollen reell sein und (hierin liegt die Spezialisierung der Gruppen) in δx^ν nur von den x^ν, in δQ_α nur von den x^ν und den Q_α (und nicht von den Ableitungen der Q_α) abhängen. In Formeln:

$$(2)\quad \begin{cases} \delta x^\nu = a_r^{\nu, 0}(x)\,\xi^r(x) + a_r^{\nu, \sigma}(x)\dfrac{\partial \xi^r}{\partial x^\sigma} + a_r^{\nu, \sigma \cdots \tau}(x)\dfrac{\partial^k \xi^r}{\partial x^\alpha \cdots \partial x^\tau}, \\ \delta Q_\alpha = c_{\alpha r}^0(x, Q)\,\xi^r(x) + c_{\alpha r}^\sigma(x, Q)\dfrac{\partial \xi^r}{\partial x^\sigma} \\ \qquad\qquad + c_{\alpha r}^{\sigma \cdots \tau}(x, Q)\dfrac{\partial^j \xi^r}{\partial x^\sigma \cdots \partial x^\tau}. \end{cases}$$

Dazu kommt noch die wesentliche Voraussetzung, daß[1])

$$(3)\qquad j \geqq k + 1\,.$$

Was die Vertauschungseigenschaften der in (2) vorkommenden Funktionen betrifft, so sollen die ξ^r c-Zahlen sein und diese Eigenschaft bei allen Transformationen der Gruppe (2) behalten (wie es ja der Festsetzung, daß die ξ^r nur von den x^ν abhängen, entspricht). Da die a nur von den x^ν abhängen, dürfen wir sie gleichfalls als c-Zahlen betrachten. Dann sind auch die δx^ν c-Zahlen, wie es sein muß, damit wir die x^ν selber als c-Zahlen behandeln dürfen.

Die wichtigsten in der Physik vorkommenden Gruppen fallen unter diesen Typus (vgl. den zweiten Teil dieser Arbeit).

Es bleibt jetzt noch übrig, auszudrücken, daß das Integral

$$\int \mathfrak{L}\, dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4$$

bei den Transformationen (2) invariant bleibt. Zu dem Zwecke führen wir zunächst einige Begriffe ein.

Neben die „lokale" Variation $\delta \Phi\,(x, Q, \partial Q / \partial x, \ldots)$ tritt die „substantielle" Variation

$$(4)\qquad \delta^* \Phi = \delta \Phi - \frac{d\Phi}{dx^\nu}\,\delta x^\nu\,;$$

---

1) Wir setzen $\dfrac{\partial^0 \xi}{(\partial x)^0} \equiv \xi$ und $\dfrac{\partial^{-1} \xi}{(\partial x)^{-1}} \equiv 0$.

wenn wir die transformierten Größen mit einem Strich versehen, so ist

$$\delta \Phi = \Phi'[x'; Q'(x'); \ldots] - \Phi[x; Q(x); \ldots],$$

während

$$\delta^* \Phi = \Phi'[x; Q'(x); \ldots] - \Phi[x; Q(x); \ldots]$$

bedeutet. Daraus folgen unmittelbar die wichtigen, auch für q-Zahlen gültigen Formeln:

$$\delta^* \frac{d\Phi}{dx^\nu} = \frac{d}{dx^\nu}\, \delta^* \Phi, \tag{5}$$

$$\delta \frac{d\Phi}{dx^\nu} = \frac{d}{dx^\nu}\, \delta \Phi - \frac{d\Phi}{dx^\varrho}\, \frac{d\, \delta x^\varrho}{dx^\nu}. \tag{6}$$

Eine Größe $\mathfrak{R}$ heißt eine skalare Dichte (in bezug auf die Gruppe), wenn sie folgende Transformationseigenschaft hat:

$$\delta^* \mathfrak{R} + \frac{d}{dx^\nu}(\mathfrak{R}\, \delta x^\nu) = 0, \tag{7}$$

oder auch nach (4)

$$\delta \mathfrak{R} + \mathfrak{R}\, \frac{d\, \delta x^\nu}{dx^\nu} = 0. \tag{8}$$

Größen hängen im allgemeinen von zweierlei Indizes ab: erstens von Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, deren Wertbereich derjenige vom Index α in Q_α ist, zweitens vom Indizes $\mu, \nu, \ldots$, die, wie der Index von x^ν, von 1 bis 4 laufen. Insbesondere vertritt der Index r von ξ^r ein oder mehrere Systeme von Indizes $(\alpha, \beta, \ldots; \mu, \nu, \ldots)$, die in einer beliebigen eindimensionalen Folge numeriert sind. Die Indizes von der Art $\alpha, \beta, \ldots$ können auch ihrerseits mehrfach sein und insbesondere Systeme von Indizes $\mu, \nu, \ldots$ enthalten.

Ein kontravarianter Tensor $K^{\alpha\nu}$ wird definiert durch die Transformationseigenschaft

$$\delta K^{\alpha\nu} = K^{\alpha\mu} \frac{d\, \delta x^\nu}{dx^\mu} - \underline{K^{\beta\nu} \frac{\partial\, \delta Q_\beta}{\partial Q_\alpha}}; \tag{9}$$

im Falle der q-Zahlen enthält diese Erklärung wegen des unterstrichenen Gliedes eine Willkür, welche wir durch die Festsetzung

$$\underline{K^{\beta\nu} \frac{\partial\, \delta Q_\beta}{\partial Q_\alpha}} = \frac{1}{2}\left(K^{\beta\nu} \frac{\partial\, \delta Q_\beta}{\partial Q_\alpha} + \frac{\partial\, \delta Q_\beta}{\partial Q_\alpha} K^{\beta\nu\dagger}\right)$$

beseitigen; dabei bezeichnet $x^\dagger$ das hermitisch konjugierte (adjungierte) von x. [Im folgenden gebrauchen wir allgemein die Bezeichnung

$$\underline{x} = \tfrac{1}{2}(x + x^\dagger).]$$

Durch diese Festsetzung bleibt ein hermitischer Tensor nach einer beliebigen Transformation der Gruppe hermitisch.

Ein kovarianter Tensor $K_{\alpha\nu}$ hat die Transformationseigenschaft:

$$\delta K_{\alpha\nu} = - K_{\alpha\mu} \frac{d\,\delta x^\mu}{d x^\nu} + \underline{K_{\beta\nu} \frac{\partial\,\delta Q_\alpha}{\partial Q_\beta}}; \tag{10}$$

analog zu (9) und (10) wird die Variation des gemischten Tensors $K_{\alpha\beta\ldots}{}^{\gamma\delta\ldots}{}_{\mu\nu\ldots}{}^{\pi\varrho\ldots}$ gebildet.

Eine Tensordichte $\mathfrak{K}^{\alpha\nu}$ transformiert sich wie das Produkt eines Tensors $K^{\alpha\nu}$ mit einer skalaren Dichte $\mathfrak{K}$, also:

$$\delta \mathfrak{K}^{\alpha\nu} = \mathfrak{K}^{\alpha\mu} \frac{d\,\delta x^\nu}{d x^\mu} - \underline{\mathfrak{K}^{\beta\nu} \frac{\partial\,\delta Q_\beta}{\partial Q_\alpha}} - \mathfrak{K}^{\alpha\nu} \frac{d\,\delta x^\mu}{d x^\mu}. \tag{11}$$

Jetzt sind wir imstande, die Invarianzforderung bezüglich der Lagrangefunktion $\mathfrak{L}$ zu formulieren. Damit nämlich das Integral $\int \mathfrak{L}\, dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4$ invariant ist, soll nach bekannten Schlüssen [1]) $\mathfrak{L}$ bis auf eine Divergenz $\mathfrak{L}' \equiv \frac{d\,\mathfrak{K}^\nu}{d x^\nu}$ eine skalare Dichte sein. In Formeln:

$$\delta(\mathfrak{L} + \mathfrak{L}') + (\mathfrak{L} + \mathfrak{L}') \frac{d\,\delta x^\nu}{d x^\nu} = 0. \tag{12}$$

Da es uns, wie gesagt, nicht auf die größte Allgemeinheit ankommt, wollen wir uns damit begnügen, der Reihe nach folgende chrakteristische Fälle zu behandeln:

1° $\mathfrak{L}' = 0$, d. h. $\mathfrak{L}$ ist selber eine skalare Dichte:

$$\delta \mathfrak{L} + \mathfrak{L} \frac{d\,\delta x^\nu}{d x^\nu} = 0; \tag{13}$$

---

1) Vgl. etwa E. Noether, Gött. Nachr. 1918. S. 211. — Die Divergenz $\frac{d\,\mathfrak{K}^\nu}{d x^\nu}$ tritt dann auf, wenn das Integral $\int \mathfrak{L}\, dx^1 \ldots dx^4$ nicht bei *beliebigem* Integrationsgebiet invariant ist, sondern nur wenn die $\mathfrak{K}^\nu$ am Rande verschwinden.

$2^0\,\mathfrak{L}'$ enthält die zweiten Ableitungen

$$Q_{\alpha,\nu\varrho} \equiv \frac{\partial^2 Q_\alpha}{\partial x^\nu\, \partial x^\varrho}$$

nur linear, d. h.

$$\mathfrak{L}' \equiv \frac{d}{dx^\nu}\left[\underline{\mathfrak{f}^{\nu,\alpha\varrho}(Q)\, Q_{\alpha,\varrho}}\right] \tag{14}$$

und es ist $j = 0$ [vgl. Formel (3)].

In beiden Fällen zerfällt die Untersuchung in zwei Schritte: a) Durchführung des erweiterten Hamiltonschen Verfahrens; b) Beweis der Kovarianz desselben bezüglich der betrachteten Gruppe.

Wir beginnen mit dem ersten Falle.

§ 2. Die konjugierten Impulse und die Identitäten

Von jetzt an legen wir also die Forderung (13) zugrunde.

Wir setzen zunächst

$$\mathfrak{P}^{\alpha\nu} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q_{\alpha,\nu}} \tag{15}$$

und nehmen als Impulse

$$\mathfrak{P}^\alpha \equiv \mathfrak{P}^{\alpha 4} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{Q}_\alpha}\,. \tag{16}$$

Beschränken wir uns zuerst auf die klassische (c-Zahl-) Theorie.

Ersetzen wir in (13) die δQ_α, $Q_{\alpha,\nu}$ und δx^ν durch ihre Werte (2), (6) als Funktionen der ξ^r und Ableitungen, so bekommen wir mehrere Identitäten, indem wir ausdrücken, daß die Koeffizienten der einzelnen Ableitungen von ξ^r identisch verschwinden sollen. Diese Identitäten enthalten aber im allgemeinen die $\dot{Q}_\alpha$ nicht nur durch die soeben eingeführten Funktionen $\mathfrak{P}^\alpha$, sondern auch in anderen Verbindungen (z. B. durch die anderen $\mathfrak{P}^{\alpha\nu}$, $\nu \neq 4$); für die Auflösung des Gleichungssystems (16) nach den $\dot{Q}_\alpha$ bieten sie also kein Interesse: sie stellen einfach Beziehungen dar, die jede Lösung $\dot{Q}_\alpha(Q, \mathfrak{P})$ dieses Systems von selbst erfüllt. Wesentlich anders liegen aber die Verhältnisse, wenn einige der betrachteten Identitäten nur die Q_α (nebst räumlichen Ableitungen) und die $\mathfrak{P}^\alpha$ enthalten: sie bedeuten dann, daß die Gleichungen (16) nicht alle voneinander unabhängig sind, so daß die allgemeine Lösung von gewissen willkürlichen Parametern (genauer: Raumzeitfunktionen) abhängt.

Nun tritt der letztere Fall bei der Gruppe (2) immer auf. Die höchsten in (13) vorkommenden Ableitungen von ξ^r sind die

$$\frac{\partial^{j+1}\,\xi^r}{\partial x^\sigma \cdots \partial x^\tau\, dx^\nu};$$

nach der Voraussetzung (3) lauten die entsprechenden Identitäten

$$\text{(17c)[1]} \qquad \sum \mathfrak{P}^{\alpha\nu}\, c^{\sigma\ldots\tau}_{\alpha r} \equiv 0,$$

wobei die Summe sich über alle Permutationen der Zahlen $\nu, \sigma, \ldots, \tau$ erstreckt. Für $\nu = \sigma = \ldots \tau = 4$ hat man insbesondere

$$\text{(18c)} \qquad \mathfrak{P}^{\alpha}\, c^{4\,4\ldots 4}_{\alpha r} \equiv 0:$$

da nun die c nur die Q_α enthalten, haben wir in (18c) r_0 Identitäten von der zuletzt besprochenen Form vor uns, welche wir „eigentliche“ Identitäten nennen wollen. Es ist ferner leicht einzusehen, daß im allgemeinen (d. h. falls die Lagrangefunktion keine spezielleren Eigenschaften besitzt) keine weiteren eigentlichen Identitäten vorkommen. Die allgemeinste Lösung $\dot{Q}_\alpha$ $(Q, \mathfrak{P}, \lambda)$ von (16) hängt also von r_0 willkürlichen Parametern λ ab.

In den bisherigen, in der Einleitung erwähnten Methoden half man sich entweder durch Zerstören der Invarianzeigenschaft der Lagrangefunktion (1. und 3. Methode) oder durch Auszeichnung einer speziellen Lösung $\dot{Q}_\alpha\,(Q, \mathfrak{P}, \lambda^0)$ (2. Methode). Im Gegensatz dazu ist der Grundgedanke der neuen Methode der, die Hamiltonsche Funktion in der üblichen Weise mittels der allgemeinen Lösung $\dot{Q}_\alpha(Q, \mathfrak{P}, \lambda)$ mit unbestimmten λ^r zu konstruieren, ohne sich zunächst um die eigentlichen Identitäten zu kümmern: Feldgleichungen und Vertauschungsrelationen haben die kanonische Form, die ersteren enthalten die λ^r. Zu diesem kanonischen Schema kommen schließlich die eigentlichen Identitäten als Nebenbedingungen hinzu. Wir werden

1) Den Nummern der Formeln, die nur für c-Zahlen unbeschränkte Gültigkeit besitzen, wird der Buchstabe c angehängt.

sehen, daß diese Methode außer ihrer Einfachheit noch den großen Vorteil hat, daß der Kovarianzbeweis des Verfahrens ohne Schwierigkeit durchführbar ist.

§ 3. Übergang zu den q-Zahlen

Zuvor müssen wir untersuchen, wie sich beim Übergang zu den q-Zahlen die eben geschilderten Verhältnisse gestalten. Nach (1) lautet dann (15):

$$\mathfrak{P}^{\alpha\nu} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{p}^{\alpha\nu} + \mathfrak{p}^{\alpha\nu\dagger}) = \underline{\mathfrak{p}^{\alpha\nu}}, \tag{19}$$

mit

$$\mathfrak{p}^{\alpha\nu} = \mathfrak{A}^{\alpha\nu;\,\beta\mu} Q_{\beta,\mu} + \mathfrak{B}^{\alpha\nu}. \tag{20}$$

Durch einen Strich über einen Index von der Art $\mu:\bar{\mu}$ deuten wir an, daß er nur von 1 bis 3 läuft; für überstrichene Indizes soll die Regel vom Weglassen des Summenzeichens ebenfalls gelten. Mit dieser Bezeichnung schreiben wir nach (19) und (20)

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{P}^{\alpha} &= \underline{\mathfrak{p}^{\alpha}}, \\ \mathfrak{p}^{\alpha} &= \mathfrak{A}^{\alpha\beta}\dot{Q}_{\beta} + \mathfrak{D}^{\alpha}, \end{aligned}\right. \tag{21}$$

wobei

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{A}^{\alpha\beta} &\equiv \mathfrak{A}^{\alpha 4;\,\beta 4} \\ \mathfrak{D}^{\alpha} &\equiv \mathfrak{A}^{\alpha 4;\,\beta\bar{\mu}} Q_{\beta,\bar{\mu}} + \mathfrak{B}^{\alpha 4} \end{aligned}\right. \tag{22}$$

gesetzt ist. Es ist in diesen Formeln

$$\mathfrak{A}^{\alpha\nu;\,\beta\mu} = \mathfrak{A}^{\beta\mu;\,\alpha\nu},$$

insbesondere

$$\mathfrak{A}^{\alpha\beta} = \mathfrak{A}^{\beta\alpha},$$

angenommen worden, was natürlich keine Einschränkung bedeutet.

Die Überlegung des vorigen Paragraphen liefert jetzt statt (17c) und (18c)

$$\underline{\sum c^{\sigma\ldots\tau}_{\alpha r}\,\mathfrak{p}^{\alpha\nu}} = 0 \tag{23}$$

und

$$\underline{c^{4\ldots 4}_{\alpha r}\;\mathfrak{p}^{\alpha}} = 0. \tag{24}$$

Da insbesondere (24) in den $\dot{Q}_{\alpha}$ identisch gilt, so ist nach (21)

$$c^{4\ldots 4}_{\alpha r}\;\mathfrak{A}^{\alpha\beta} = 0, \tag{25}$$

$$c^{4\ldots 4}_{\alpha r}\;\mathfrak{D}^{\alpha} = 0: \tag{26}$$

die Koeffizienten der Lagrangefunktion müssen u. a. diese Beziehungen erfüllen, damit $\mathfrak{L}$ die verlangte Dichteeigenschaft haben kann. Die Relationen (25) und (26) heben wir für späteren Gebrauch hervor.

Nun aber können wir nicht weiterkommen, ohne etwas über die Vertauschungsrelationen $[Q_\alpha, \dot{Q}_\beta]$ zu wissen. Wenn wir die $\dot{Q}_\beta$ als Funktionen der Q_α und $\mathfrak{P}^\alpha$ kennen würden, so könnten wir den Wert von $[Q_\alpha, \dot{Q}_\beta]$ aus den kanonischen Vertauschungsrelationen, die wir, wie gesagt, beizubehalten wünschen, ableiten. Es ist indessen nicht einmal von vornherein sicher, ob wir aus (21) die $\dot{Q}_\beta$ als Funktionen der *Matrizen* $\mathfrak{P}^\alpha$ ableiten können, oder nur als Funktionen der *Matrixelemente* von $\mathfrak{P}^\alpha$. Der einzige Ausweg ist der, daß wir versuchsweise eine *Annahme* über $[Q_\alpha, \dot{Q}_\beta]$ machen, auf Grund deren die Lösung von (21) die Gestalt $\dot{Q}_\alpha(Q, \mathfrak{P}, \lambda)$ annimmt und nachher prüfen, ob die gemachte Annahme mit den kanonischen Vertauschungsrelationen verträglich ist.

Eine naheliegende Annahme ist folgende: die $[Q_\alpha, \dot{Q}_\beta]$ sollen *schiefe* Funktionen[1]) von den Q_α und $Q_{\alpha,\bar{\nu}}$, nicht aber von den $\dot{Q}_\alpha$ (bzw. den $\mathfrak{P}^\alpha$) sein. (Ob dabei, wenn Q_α und $\dot{Q}_\beta$ im selben Punkt genommen sind, unbestimmte Faktoren, wie $\delta(0)$, vorkommen, ist gleichgültig). Führen wir einige unmittelbare Folgerungen dieser Annahme an:

1. Nach (20) sind ebenfalls die $[Q_\alpha, \mathfrak{p}^{\beta\nu}]$ und $[Q_\alpha, \mathfrak{p}^{\beta\nu\dagger}]$ schiefe Funktionen der Q_α und $Q_{\alpha,\bar{\nu}}$ allein.

2. Die $[Q_\alpha, \dot{Q}_\beta]$, $[Q_\alpha, \mathfrak{p}^{\beta\nu}]$ und $[Q_\alpha, \mathfrak{p}^{\beta\nu\dagger}]$ sind mit jeder Funktion der Q_α und $Q_{\alpha,\bar{\nu}}$ vertauschbar.

3. Es ist

$$[Q_\alpha, \mathfrak{p}^{\beta\nu}] = [Q_\alpha, \mathfrak{p}^{\beta\nu\dagger}]. \tag{27}$$

Infolgedessen kann man statt (23) und (24)

$$\sum \underline{c_{\alpha r}^{\sigma \dots \tau} \, \mathfrak{P}^{\alpha\nu}} = 0, \tag{28}$$

$$\mathfrak{F}_r \equiv \underline{c_{\alpha r}^{4 \dots 4} \, \mathfrak{P}^\alpha} = 0 \tag{29}$$

schreiben.

Aus (25) folgt nun, daß die N linearen Gleichungen

$$\mathfrak{A}^{\alpha\beta}\dot{Q}_\beta + \dot{Q}_\beta\mathfrak{A}^{\beta\alpha} = 2(\mathfrak{P}^\alpha - \mathfrak{D}^\alpha) \tag{21}$$

1) Eine q-Zahl x heißt *schief*, wenn $x^\dagger = -x$.

nicht alle unabhängig sind, sondern daß ihre Determinante $|\mathfrak{A}^{\alpha\beta}|$ den Rang $N - r_0$ hat. Da sie symmetrisch ist, gibt es einen von Null verschiedenen Hauptminor vom Grade $N - r_0$; die dazu bezüglichen Indizes wollen wir mit einem Strich versehen:

$$|\mathfrak{A}^{\alpha'\beta'}| \neq 0,$$

während die übrigen doppelt gestrichen seien: α'', β'', $\ldots$. Die Determinante $|\mathfrak{A}^{\alpha'\beta'}|$, sowie ihre reziproke $|\mathfrak{A}_{\alpha'\beta'}|$, sind symmetrisch und es gilt:

$$\mathfrak{A}^{\alpha'\beta'}\mathfrak{A}_{\beta'\gamma'} = \delta^{\alpha'}_{\gamma'}, \tag{30}$$

wobei δ^{α}_{β} wie üblich gleich 0 oder 1 ist, je nachdem $\alpha \neq \beta$ oder $\alpha = \beta$.

Gelingt es also, eine *spezielle* Lösung $\dot{Q}_{\beta}{}^0(Q, \mathfrak{P})$ von (21) zu finden, so hat die allgemeinste Lösung die Form:

$$\dot{Q}_{\beta} = \dot{Q}_{\beta}{}^0 + \lambda^r x_{\beta r},$$

wo die λ^r r_0 willkürliche Parameter und $x_{\beta r}$ r_0 unabhängige Lösungen der homogenen Gleichungen

$$\mathfrak{A}^{\alpha\beta} x_{\beta r} + x_{\beta r}\mathfrak{A}^{\beta\alpha} = 0$$

darstellen. Nach (25) können wir nun

$$x_{\beta r} = c^{4\cdots 4}_{\beta r}$$

wählen und schreiben:

$$\dot{Q}_{\beta} = \dot{Q}_{\beta}{}^0 + \lambda^r c^{4\cdots 4}_{\beta r}. \tag{31}$$

Ferner behaupte ich, daß

$$\begin{cases} \dot{Q}^0_{\beta'} = \frac{1}{2}\{\mathfrak{A}_{\beta'\gamma'}(\mathfrak{P}^{\gamma'} - \mathfrak{D}^{\gamma'}) + (\mathfrak{P}^{\gamma'} - \mathfrak{D}^{\gamma'})\mathfrak{A}_{\gamma'\beta'}\} \\ \dot{Q}^0_{\beta''} = 0 \end{cases} \tag{32}$$

eine spezielle Lösung von (21) ist; ist dies nachgewiesen, so ist uns die Auflösung von (21) nach den $\dot{Q}_{\beta}$ wirklich gelungen: denn die Lösung (31) hat offenbar die verlangte Eigenschaft, daß vermöge der kanonischen Vertauschungsrelationen $[Q_{\alpha}, \dot{Q}_{\beta}]$ eine schiefe Funktion der Q_{α} und $Q_{\alpha, \bar{\nu}}$ wird.

Durch Einsetzen von (32) in die linke Seite von (21), die wir für einen Augenblick $\mathfrak{T}_{\alpha}$ nennen wollen, bekommt man

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{T}^{\alpha} &= \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{A}^{\alpha\beta'}\{\mathfrak{A}_{\beta'\gamma'}(\mathfrak{P}^{\gamma'}-\mathfrak{D}^{\gamma'})+(\mathfrak{P}^{\gamma'}-\mathfrak{D}^{\gamma'})\,\mathfrak{A}_{\gamma'\beta'}\} \\
&\quad+\tfrac{1}{2}\{\mathfrak{A}_{\beta'\gamma'}(\mathfrak{P}^{\gamma'}-\mathfrak{D}^{\gamma'})+(\mathfrak{P}^{\gamma'}-\mathfrak{D}^{\gamma'})\,\mathfrak{A}_{\gamma'\beta'}\}\,\mathfrak{A}^{\beta'\alpha} \\
&= \mathfrak{A}^{\alpha\beta'}\mathfrak{A}_{\beta'\gamma'}(\mathfrak{P}^{\gamma'}-\mathfrak{D}^{\gamma'})+(\mathfrak{P}^{\gamma'}-\mathfrak{D}^{\gamma'})\,\mathfrak{A}_{\gamma'\beta'}\mathfrak{A}^{\beta'\alpha} \\
&\quad+\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{A}^{\alpha\beta'}[\mathfrak{P}^{\gamma'}-\mathfrak{D}^{\gamma'},\ \mathfrak{A}_{\gamma'\beta'}]+\tfrac{1}{2}[\mathfrak{A}_{\beta'\gamma'},\ \mathfrak{P}^{\gamma'}-\mathfrak{D}^{\gamma'}]\,\mathfrak{A}^{\beta'\alpha} \\
&= \mathfrak{A}^{\alpha\beta'}\mathfrak{A}_{\beta'\gamma'}(\mathfrak{P}^{\gamma'}-\mathfrak{D}^{\gamma'})+(\mathfrak{P}^{\gamma'}-\mathfrak{D}^{\gamma'})\,\mathfrak{A}_{\gamma'\beta'}\mathfrak{A}^{\beta'\alpha},
\end{aligned}
$$

wegen der Folgerung 2 aus unserer Annahme. Für $\alpha=\alpha'$ ist bereits nach (30)

$$\mathfrak{T}^{\alpha'} = 2\,(\mathfrak{P}^{\alpha'}-\mathfrak{D}^{\alpha'}).$$

Nun sind nach der Theorie der linearen Gleichungen und unter Benutzung unserer Annahme über $[Q_\alpha, \dot{Q}_\beta]$ die Identitäten (29) äquivalent mit

$$\mathfrak{P}^{\alpha''} = \mathfrak{A}^{\alpha''\beta'}\mathfrak{A}_{\beta'\gamma'}\mathfrak{P}^{\gamma'}$$

und ebenso (26) äquivalent mit

$$\mathfrak{D}^{\alpha''} = \mathfrak{A}^{\alpha''\beta'}\mathfrak{A}_{\beta'\gamma'}\mathfrak{D}^{\gamma'};$$

folglich ist auch

$$\mathfrak{T}^{\alpha''} = 2\,(\mathfrak{P}^{\alpha''}-\mathfrak{D}^{\alpha''}),$$

womit der Nachweis, daß (31), (32) die allgemeinste Lösung von (21) im Einklang mit den kanonischen Vertauschungsrelationen darstellt, vollständig erbracht ist.

§ 4. Aufstellung der Hamiltonfunktion

Klassisch lautet die Hamiltonfunktion

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{P}^{\alpha}\dot{Q}_{\alpha} - \mathfrak{L};$$

von jedem quantenmechanischen Ansatz müssen wir nun verlangen, daß

$$\frac{\partial\,\mathfrak{H}}{\partial\,Q_{\alpha,\bar{\nu}}} = -\,\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,Q_{\alpha,\bar{\nu}}}, \tag{33}$$

eine Eigenschaft, die sich für die Durchführung der Theorie als unentbehrlich erweisen wird.

Nun ist

$$\left(\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,Q_{\alpha,\bar{\nu}}}\right)_{\mathfrak{P}^{\alpha}} = \left(\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,Q_{\alpha,\bar{\nu}}}\right)_{\dot{Q}_{\alpha}} + \left(\frac{\partial\,\dot{Q}_{\beta}}{\partial\,Q_{\alpha,\bar{\nu}}}\right)_{\mathfrak{P}^{\alpha}}\cdot\mathfrak{p}^{\beta}$$

und nach (31), (32) enthält $\left(\frac{\partial \dot{Q}_\beta}{\partial Q_{\alpha,\bar{\nu}}}\right)_{\mathfrak{P}^\alpha}$ nicht mehr die $\mathfrak{P}^\alpha$ folglich dürfen wir schreiben:

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q_{\alpha,\bar{\nu}}}\right)_{\mathfrak{P}^\alpha} = \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q_{\alpha,\bar{\nu}}}\right)_{\dot{Q}_\alpha} + \underline{\left(\frac{\partial \dot{Q}_\beta}{\partial Q_{\alpha,\bar{\nu}}}\right)_{\mathfrak{P}^\alpha} \cdot \mathfrak{P}^\beta}.$$

Die gewünschte Eigenschaft (33) hat also der Ansatz

$$\mathfrak{H} = \underline{\dot{Q}_\alpha \mathfrak{P}^\alpha} - \mathfrak{L}. \tag{34}$$

Da nach (25) und (26)

$$\mathfrak{L}[Q; \dot{Q}(Q, \mathfrak{P}, \lambda)] = \mathfrak{L}(Q, \dot{Q}^0)$$

ist, können wir schreiben gemäß der Bezeichnung (29)

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 + \lambda^r \mathfrak{F}_r, \tag{35}$$

mit

$$\mathfrak{H}_0 = \underline{\dot{Q}_\alpha{}^0 \mathfrak{P}^\alpha} - \mathfrak{L}[Q, \dot{Q}^0(Q, \mathfrak{P})]. \tag{36}$$

Nun setzen wir die kanonischen Vertauschungsrelationen an

$$\begin{cases} [Q_\alpha(\mathfrak{r}), Q_\beta(\mathfrak{r}')] = [\mathfrak{P}^\alpha(\mathfrak{r}), \mathfrak{P}^\beta(\mathfrak{r}')] = 0, \\ [\mathfrak{P}^\alpha(\mathfrak{r}), Q_\beta(\mathfrak{r}')] = \omega\, \delta_\beta{}^\alpha\, \delta(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'),\ \omega = \frac{h c}{2\pi i}, \end{cases} \tag{37}$$

sowie die Feldgleichungen

$$\begin{cases} [\overline{\mathfrak{H}}, Q_\alpha] = \omega \dot{Q}_\alpha \\ [\overline{\mathfrak{H}}, \mathfrak{P}^\alpha] = \omega \dot{\mathfrak{P}}^\alpha, \end{cases} \tag{38}$$

wobei die Bezeichnung

$$\overline{\mathfrak{A}} \equiv \int \mathfrak{A}\, d x^1 d x^2 d x^3 \tag{39}$$

gebraucht ist; das Integrationsgebiet muß so gewählt werden, daß die Feldgrößen am Rande *konstante* Werte annehmen und zwar solche, daß $\mathfrak{L}$ dort verschwindet.

Zu (37) und (38) kommen noch als Nebenbedingungen die eigentlichen Identitäten (29) $\mathfrak{F}_r = 0$ hinzu. Aber es muß bewiesen werden, daß es erlaubt ist, die q-Zahlen $\mathfrak{F}_r$ alle gleichzeitig gleich Null zu setzen; mit anderen Worten, daß die $\mathfrak{F}_r$ untereinander vertauschbar sind, wenigstens auf Grund der Nebenbedingungen $\mathfrak{F}_r = 0$ selber.

Die jetzt folgenden Betrachtungen dienen nicht nur zu diesem Zwecke, sondern sind auch für den später zu erbringenden Kovarianzbeweis grundlegend.

Wir definieren zunächst den Impuls-Energie-Pseudotensor[1])

$$\mathfrak{G}^{\nu}_{\mu} = \underline{\mathfrak{P}^{\alpha\nu} Q_{\alpha,\mu}} - \delta^{\nu}_{\mu}\,\mathfrak{L}\,, \tag{40}$$

sodann die Impuls-Energie-Pseudodichte

$$\mathfrak{G}_{\mu} \equiv \mathfrak{G}^{4}_{\mu} = \underline{\mathfrak{P}^{\alpha} Q_{\alpha,\mu}} - \delta^{4}_{\mu}\,\mathfrak{L}\,, \tag{41}$$

deren vierte Pseudokomponente die Hamiltonfunktion (34) ist:

$$\mathfrak{H} \equiv \mathfrak{G}_4 \equiv \mathfrak{G}^4_4\,.$$

Die Komponenten des Gesamtimpulses sind dann $\overline{\mathfrak{G}_{\bar{\nu}}}$, die Gesamtenergie $\overline{\mathfrak{H}}$.

Die V.-R. (Vertauschungsrelationen) von $\overline{\mathfrak{H}}$ mit den Q_α, $\mathfrak{P}^\alpha$ sind durch (38) gegeben. Was die $\overline{\mathfrak{G}_{\bar{\nu}}}$ betrifft, so finden wir zunächst auf Grund von (37)

$$\left\{\begin{aligned} [\mathfrak{G}_{\bar{\nu}}(\mathfrak{r}), Q_\alpha(\mathfrak{r}')] &= \omega\,\frac{\partial\, Q_\alpha}{\partial x^{\bar{\nu}}}\,\delta(\mathfrak{r}-\mathfrak{r}')\,, \\ [\mathfrak{G}_{\bar{\nu}}(\mathfrak{r}), \mathfrak{P}^\alpha(\mathfrak{r}')] &= -\,\omega\,\mathfrak{P}^\alpha\,\frac{\partial\,\delta(\mathfrak{r}-\mathfrak{r}')}{\partial x^{\bar{\nu}}}\,, \end{aligned}\right. \tag{42}$$

sodann

$$[\overline{\mathfrak{G}}_{\bar{\nu}}, \Phi(Q, \mathfrak{P})] = \omega\,\frac{d\,\Phi}{d x^{\bar{\nu}}}\,,$$

allgemeiner also

$$\omega\,\frac{d\,\Phi}{d x^{\nu}} = [\overline{\mathfrak{G}}_{\nu}, \Phi(Q, \mathfrak{P}, x)] + \omega\,\frac{\partial\,\Phi}{\partial\, x^{\nu}}\,. \tag{43}$$

Daraus folgt unmittelbar

$$[\overline{\mathfrak{G}}_{\nu}, \overline{\mathfrak{G}}_{\mu}] = 0: \tag{44}$$

ein Ausdruck für die Vertauschbarkeit der Differentiationen $\dfrac{d}{d x^\nu}$, dessen physikalischer Inhalt in der zeitlichen Konstanz der $\overline{\mathfrak{G}}_{\nu}$ als Folge der Gleichungen (38), (37) besteht.[2])

---

1) Der Vorsatz „Pseudo“ deutet an, daß die betreffenden Größen keine Tensoren sind.

2) Falls die $\lambda^r x^4$ explizite enthalten, gilt (44) erst auf Grund der Nebenbedingungen (29).

§ 5. Quantenmechanischer Ausdruck der infinitesimalen Transformation der Gruppe

In diesem Paragraphen beweisen wir den Satz:

$$\omega\, \delta^* \Phi(Q, \mathfrak{P}) = [\overline{\mathfrak{M}}, \Phi], \tag{45}$$

wobei

$$\mathfrak{M} = \underline{\mathfrak{P}^\alpha\, \delta\, Q_\alpha} - \mathfrak{G}_\mu\, \delta\, x^\mu . \tag{46}$$

Dies soll auf Grund der Feldgleichungen (38) und der V.-R. (37) gelten, unter der Voraussetzung (13), daß $\mathfrak{L}$ eine skalare Dichte ist.

Um diesen Satz zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß

$$\left\{\begin{aligned} \omega\, \delta^* Q_\alpha &= [\overline{\mathfrak{M}}, Q_\alpha], \\ \omega\, \delta^* \mathfrak{P}^\alpha &= [\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{P}^\alpha]. \end{aligned}\right. \tag{47}$$

Nach (37) und (42) ist, wenn man bedenkt, daß δQ_α nach (2) nur die Q_α (nicht die $\mathfrak{P}^\alpha$) enthält,

$$[\overline{\mathfrak{M}}, Q_\alpha] = \omega\, \delta Q_\alpha - \frac{d\, Q_\alpha}{d\, x^{\bar{\mu}}}\, \delta\, x^{\bar{\mu}} - [\overline{\delta\, x^4 \cdot \mathfrak{H}}, Q_\alpha].$$

Nun ist, nach H. P. I, Formel (20),

$$\left\{\begin{aligned} [\overline{\delta\, x^4\, \mathfrak{H}}, Q_\alpha] &= \omega\, \frac{\partial\, (\delta\, x^4\, \mathfrak{H})}{\partial\, \mathfrak{P}^\alpha} = \delta\, x^4 \cdot [\overline{\mathfrak{H}}, Q_\alpha], \\ [\overline{\delta\, x^4\, \mathfrak{H}}, \mathfrak{P}^\alpha] &= -\, \omega \left\{ \frac{\partial\, (\delta\, x^4\, \mathfrak{H})}{\partial\, Q_\alpha} - \frac{d}{d\, x^{\bar{\nu}}}\, \frac{\partial\, (\delta\, x^4\, \mathfrak{H})}{\partial\, Q_{\alpha,\, \bar{\nu}}} \right\} \\ &= \delta\, x^4\, [\overline{\mathfrak{H}}, \mathfrak{P}^\alpha] + \omega\, \frac{d\, \delta\, x^4}{d\, x^{\bar{\nu}}}\, \frac{\partial\, \mathfrak{H}}{\partial\, Q_{\alpha,\, \bar{\nu}}} . \end{aligned}\right. \tag{48}$$

Folglich gilt tatsächlich, mit Rücksicht auf (4), die erste Formel (47), wenn man noch die erste Feldgleichung (38) benutzt.

Analog findet man unter Berücksichtigung der zweiten Formel (48), der zweiten Feldgleichung (38) und der Formel (33)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{\omega}\, [\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{P}^\alpha] &= -\, \underline{\mathfrak{P}^\beta\, \frac{\partial\, \delta\, Q_\beta}{\partial\, Q_\alpha}} - \frac{d}{d x^{\bar{\nu}}}\, (\mathfrak{P}^\alpha\, \delta\, x^{\bar{\nu}}) \\ &\qquad - \frac{d\, \mathfrak{P}^\alpha}{d x^4}\, \delta x^4 + \mathfrak{P}^{\alpha \bar{\nu}}\, \frac{d\, \delta\, x^4}{d x^{\bar{\nu}}} \\ &= -\, \underline{\mathfrak{P}^\beta\, \frac{\partial\, \delta\, Q_\beta}{\partial\, Q_\alpha}} + \mathfrak{P}^{\alpha\, \nu}\, \frac{d\, \delta\, x^4}{d x^\nu} - \frac{d}{d x^\nu}\, (\mathfrak{P}^\alpha\, \delta\, x^\nu). \end{aligned}\right. \tag{49}$$

Es bleibt nur noch übrig zu zeigen, daß die rechte Seite von (49) gleich $\delta^* \mathfrak{P}^\alpha$ ist. Berechnen wir also direkt $\delta \mathfrak{P}^\alpha$, oder vielmehr allgemeiner $\delta \mathfrak{P}^{\alpha\nu}$. Zunächst gilt:

$$\delta \mathfrak{P}^{\alpha\nu} = \delta \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q_{\alpha,\nu}} \right) = \frac{\partial (\delta \mathfrak{L})}{\partial Q_{\alpha,\nu}} - \underline{\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q_{\beta,\mu}} \frac{\partial \delta Q_{\beta,\mu}}{\partial Q_{\alpha,\nu}}}, \tag{50}$$

und zwar bei c-Zahlen allgemein, bei q-Zahlen jedenfalls, wenn $\mathfrak{L}$ die Form (1) hat und $\frac{\partial \delta Q_{\beta,\mu}}{\partial Q_{\alpha,\nu}}$ die $\dot{Q}_\alpha$ bzw. $\mathfrak{P}^\alpha$ nicht enthält. Daß letzteres in unserem Falle zutrifft, zeigt die Formel (6), welche ergibt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial Q_{\alpha,\nu}} \delta Q_{\beta,\mu} &= \frac{\partial}{\partial Q_{\alpha,\nu}} \left\{ \frac{d}{dx^\mu} \delta Q_\beta - Q_{\beta,\varrho} \frac{d\,\delta x^\varrho}{dx^\mu} \right\} \\ &= \frac{\partial \delta Q_\beta}{\partial Q_\alpha} \delta^\nu_\mu - \frac{d\,\delta x^\nu}{dx^\mu} \delta^\alpha_\beta.\end{aligned}$$

Dies, in (50) eingesetzt, liefert

$$\delta \mathfrak{P}^{\alpha\nu} = \underline{- \mathfrak{P}^{\beta\nu} \frac{\partial \delta Q_\beta}{\partial Q_\alpha}} + \mathfrak{P}^{\alpha\mu} \frac{d\,\delta x^\nu}{dx^\mu} + \frac{\partial (\delta \mathfrak{L})}{\partial Q_{\alpha,\nu}};$$

benutzen wir jetzt (13), so kommt

$$\delta \mathfrak{P}^{\alpha\nu} = \underline{- \mathfrak{P}^{\beta\nu} \frac{\partial \delta Q_\beta}{\partial Q_\alpha}} + \mathfrak{P}^{\alpha\mu} \frac{d\,\delta x^\nu}{dx^\mu} - \mathfrak{P}^{\alpha\nu} \frac{d\,\delta x^\mu}{dx^\mu}; \tag{51}$$

d. h. wie der Vergleich mit (11) lehrt: $\mathfrak{P}^{\alpha\nu}$ ist eine Tensordichte. Aus (51) folgt nun sofort mit Rücksicht auf (4) für $\delta^* \mathfrak{P}^\alpha \equiv \delta^* \mathfrak{P}^{\alpha 4}$ der Ausdruck (49).

Somit ist die Formel (45) bewiesen.

§ 6. Die $\overline{\mathfrak{F}_r}$ als spezielle infinitesimale Transformationen

Betrachten wir einen bestimmten, aber beliebigen Schnitt $x^4 = x_0^4$. Auf diesem Schnitt betrachten wir die Transformationen unserer Gruppe (2), welche durch die Forderungen

$$\left\{\begin{aligned} &(\xi^r)_{x^4 = x_0^4} = \left(\frac{\partial \xi^r}{\partial x^\sigma} \right)_{x^4 = x_0^4} = \cdots = \left(\frac{\partial^{j-1} \xi^r}{\partial x^\sigma \cdots \partial x^\tau} \right)_{x^4 = x_0^4} = 0, \\ &\left(\frac{\partial^j \xi^r}{\partial x^\sigma \cdots \partial x^\tau} \right)_{x^4 = x_0^4} = 0, \text{ wenn nicht alle } \sigma, \ldots, \tau \text{ gleich 4 sind}, \\ &\left[\frac{\partial^j \xi^r}{(\partial x^4)^j} \right]_{x^4 = x_0^4} = \varepsilon^r \end{aligned}\right. \tag{52}$$

definiert sind, wobei die ε^r beliebige Raumfunktionen sind.

Wegen der Voraussetzung (3) führen diese Transformationen nicht aus dem Schnitt $x^4 = x_0{}^4$ heraus. Sie bilden in jedem Punkte dieses Schnittes eine endliche kontinuierliche Untergruppe der Gruppe (2), deren infinitesimale Transformation nach (45) und (46) gegeben ist durch

$$\omega\, \delta' \Phi(Q, \mathfrak{P}) = [\overline{\varepsilon^r \mathfrak{F}_r}, \Phi].$$

(Hierin sind Q, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{F}_r$ für $x^4 = x_0{}^4$ zu nehmen.)

Der zweite Fundamentalsatz von Lie über endliche Transformationsgruppen besagt, angewandt auf diese Untergruppe, daß in jedem Punkte des Schnittes

$$[\mathfrak{F}_r, [\mathfrak{F}_s, \Phi]] - [\mathfrak{F}_s, [\mathfrak{F}_r, \Phi]] = c^t_{rs} [\mathfrak{F}_t, \Phi]$$

gilt, wo die c^t_{rs} die vom Punkte $(x^1, x^2, x^3, x_0{}^4)$ abhängigen „Strukturkonstanten" der Gruppe sind. Nach der Jacobischen Identität über Klammersymbole wird die linke Seite einfach gleich

$$[[\mathfrak{F}_s, \mathfrak{F}_r], \Phi];$$

also bekommen wir

$$[\mathfrak{F}_s, \mathfrak{F}_r] = c^t_{rs}\, \mathfrak{F}_t. \tag{53}$$

Daraus folgt die zur Begründung des in § 4 dargelegten Verfahrens noch nötige Tatsache, daß *auf Grund von* $\mathfrak{F}_r = 0$ *die* $\mathfrak{F}_r$ *untereinander vertauschbar sind.*

§ 7. Die infinitesimale Transformation $\overline{\mathfrak{M}}$ als Integral der Bewegung

Kehren wir einen Augenblick zur reinen c-Zahltheorie zurück. Setzen wir

$$\mathfrak{M}^\nu = \underline{\mathfrak{P}^{\alpha\nu}\, \delta Q_\alpha} - \mathfrak{G}^\nu_\mu\, \delta x^\mu \tag{54}$$

und

$$\mathfrak{L}^\alpha = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q_\alpha} - \frac{d}{dx^\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q_{\alpha,\nu}}, \tag{55}$$

so ist, wie leicht zu sehen, die Voraussetzung (13) gleichbedeutend mit

$$\frac{d\, \mathfrak{M}^\nu}{dx^\nu} + \mathfrak{L}^\alpha\, \delta^* Q_\alpha = 0; \tag{56c}$$

berücksichtigt man nun, daß nach (46) und (54)

$$\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}^4$$

und entsprechend der Bedeutung der Bezeichnung (39)

$$\frac{d\,\overline{\mathfrak{M}^{\bar{\nu}}}}{dx^{\bar{\nu}}} = 0$$

ist, so folgt aus (56 c)

$$\frac{d\,\overline{\mathfrak{M}}}{dx^4} = -\,\overline{\mathfrak{L}^{\alpha}\,\partial^* Q_{\alpha}}\,. \tag{57c}$$

Nun sind bekanntlich die Hamiltonschen Gleichungen (38) [vermöge der eigentlichen Identitäten (29)] äquivalent mit den Lagrangegleichungen

$$\mathfrak{L}^{\alpha} = 0\,.$$

Nach (57 c) gilt somit, auf Grund von (13) und (38)

$$\frac{d\,\overline{\mathfrak{M}}}{dx^4} = 0\,. \tag{58}$$

Die Gleichung (56 c) läßt sich nicht auf q-Zahlen übertragen. Die Ableitung von (58) gelingt jedoch unter Benutzung der nämlichen Voraussetzungen (13) und (38), bloß in etwas anderem Zusammenhang. Die beiden Relationen (13) und (38) wurden zur Ableitung der Formeln (43) und (45) wesentlich gebraucht. Wenden wir diese letzteren auf die Identität (5) an, wobei Φ nur von Q und $\mathfrak{P}$ abhängen möge:

$$\left[\overline{\mathfrak{M}},\,[\overline{\mathfrak{G}}_{\nu},\,\Phi]\right] = \left[\overline{\mathfrak{G}}_{\nu},\,[\overline{\mathfrak{M}},\,\Phi]\right] + \left[\omega\,\frac{\partial\,\overline{\mathfrak{M}}}{\partial x^{\nu}},\,\Phi\right],$$

$$\left[[\overline{\mathfrak{G}}_{\nu},\,\overline{\mathfrak{M}}] + \omega\,\frac{\partial\,\overline{\mathfrak{M}}}{\partial x^{\nu}},\,\Phi\right] = 0$$

nach der Jacobischen Identität, oder schließlich

$$\left[\frac{d\,\overline{\mathfrak{M}}}{dx^{\nu}},\,\Phi\right] = 0\,.$$

Insbesondere ist also $\frac{d\,\overline{\mathfrak{M}}}{dx^4}$ eine (eventuell von x^4 abhängige) c-Zahl. Nun kann diese c-Zahl, als Summe von lauter q-Zahlen, nichts anderes als Null sein. Diesen Schluß bestätigt übrigens die etwas mühsame Ausrechnung von $\frac{d\,\overline{\mathfrak{M}}}{dx^4}$.

Aus (58) lassen sich interessante Schlüsse ziehen über den Zusammenhang von $\overline{\mathfrak{M}}$ mit den Funktionen $\mathfrak{F}_r$. Durch partielle Integrationen wird $\overline{\mathfrak{M}}$ in die Form:

$$(59) \qquad \overline{\mathfrak{M}} = \int dx^1\, dx^2\, dx^3 \sum_{i=0}^{i=j} \mathfrak{N}_r^{\;i} \frac{\partial^i \xi^r}{(\partial x^4)^i}$$

gebracht, wobei

$$(60) \qquad \mathfrak{N}_r^{\;j} \equiv \mathfrak{F}_r .$$

(58) drückt sich dann folgendermaßen aus:

$$\int dx^1\, dx^2\, dx^3 \sum_{i=0}^{i=j} \mathfrak{N}_r^{\;i} \frac{\partial^{i+1} \xi^r}{(\partial x^4)^{i+1}}$$

$$= -\int dx^1\, dx^2\, dx^3 \sum_{i=0}^{i=j} \frac{d\,\mathfrak{N}_r^{\;i}}{dx^4} \frac{\partial^i \xi^r}{(\partial x^4)^i} .$$

Daraus folgert man durch Koeffizientenvergleich

$$(61) \qquad \mathfrak{N}_r^{\;i} = -\frac{d\,\mathfrak{N}_r^{\;i+1}}{dx^4} \qquad (i = 0, 1, \ldots, j-1)$$

und

$$(62) \qquad \mathfrak{N}_r^{\;j} = 0 , \qquad \frac{d\,\mathfrak{N}_r^{\;0}}{dx^4} = 0 .$$

Aus (60) und (61) ergibt sich

$$(63) \qquad \mathfrak{N}_r^{\;i} = (-1)^{j-i} \frac{d^{j-i}\,\mathfrak{F}_r}{(dx^4)^{j-i}} \qquad (i = 0, 1, \ldots, j),$$

also für $\overline{\mathfrak{M}}$ die merkwürdige Gestalt

$$(63') \qquad \overline{\mathfrak{M}} = \int dx^1\, dx^2\, dx^3 \sum_{i=0}^{i=j} (-1)^{j-i} \frac{d^{j-i}\,\mathfrak{F}_r}{(dx^4)^{j-i}} \frac{\partial^i \xi^r}{(\partial x^4)^i} .$$

Die erste Identität (62) ist nach (60) trivialerweise $\mathfrak{F}_r = 0$, die zweite aber besagt, daß auf Grund der Feldgleichungen und der Identitäten (29)

$$(64) \qquad \frac{d^{j+1}\,\mathfrak{F}_r}{(dx^4)^{j+1}} = 0 .$$

Dies liefert die Antwort auf die Frage, inwieweit man durch abermalige Differentiation der Nebenbedingungen (29) neue Relationen bekommt.

Ist insbesondere $j = 1$, so sind die einzigen neuen Gleichungen $\frac{d\,\mathfrak{F}_r}{dx^4} = 0$, d. h.

$$[\overline{\mathfrak{H}}, \mathfrak{F}_r] + \omega \frac{\partial\,\mathfrak{F}_r}{\partial x^4} = 0 .$$

Ist nun die Lagrangefunktion von der Gestalt (1), d. h. gilt (35), so wird die letzte Gleichung mit Rücksicht auf (53)

$$[\overline{\mathfrak{H}}_0, \mathfrak{F}_r] + \omega \frac{\partial\,\mathfrak{F}_r}{\partial x^4} + c^t_{rs}\,\lambda^s\,\mathfrak{F}_t = 0$$

oder schließlich vermöge $\mathfrak{F}_r = 0$

$$[\overline{\mathfrak{H}}_0, \mathfrak{F}_r] + \omega \frac{\partial\,\mathfrak{F}_r}{\partial x^4} = 0:$$

da weder die Nebenbedingungen noch diese neuen Gleichungen die λ^r enthalten, so bleiben dieselben wesentlich unbestimmt. (Anders aber, falls $j > 1$, denn bereits $\frac{d^2\,\mathfrak{F}_r}{(dx^4)^2} = 0$ enthält die λ^r). Infolge der wesentlichen Unbestimmtheit der λ^r fehlen r_0 Feldgleichungen von der Form

$$\omega\,\dot{\mathfrak{P}}^a = [\overline{\mathfrak{H}}, \mathfrak{P}^a];$$

zum Ersatz reichen gerade die Gleichungen

$$\mathfrak{N}_r^{\,0} \equiv \frac{d\,\mathfrak{F}_r}{dx^4} = 0, \quad \text{d. h.} \quad [\overline{\mathfrak{H}}_0, \mathfrak{F}_r] + \omega \frac{\partial\,\mathfrak{F}_r}{\partial x^4} = 0$$

aus.

Im Falle $j = 0$ werden die fehlenden Feldgleichungen ersetzt durch die Identitäten $\mathfrak{F}_r = 0$ selber, die sich gemäß (64), d. h. $\frac{d\,\mathfrak{F}_r}{dx^4} = 0$ auf Grund der Feldgleichungen mit der Zeit fortpflanzen.

Eine letzte Bemerkung wollen wir noch an die Formel (63′) anknüpfen. Fragen wir nach der Untergruppe unserer Gruppe, die alle Punkte des Schnittes $x^4 = x_0^{\,4}$ invariant läßt: diese Untergruppe ist offenbar ein *Normalteiler*. Die Bedingungen

$$\delta\,x^\nu = 0 \quad \text{für} \quad x^4 = x_0^{\,4}$$

bedeuten

$$(\xi^r)_{x^4 = x_0^4} = \left(\frac{\partial\,\xi^r}{\partial x^\sigma}\right)_{x^4 = x_0^4} = \cdots = \left[\frac{\partial^k\,\xi^r}{\partial x^\sigma \cdots \partial x^\tau}\right]_{x^4 = x_0^4} = 0;$$

die Infinitesimaltransformation lautet demnach gemäß (63′)

$$\overline{\mathfrak{S}} = \int dx^1\,dx^2\,dx^3 \sum_{i=k+1}^{i=j} (-1)^{j-i} \frac{d^{j-i}\mathfrak{F}_r}{(dx^4)^{j-i}}\,\varepsilon_i^r, \tag{65}$$

wobei $\frac{d^{j-i}\mathfrak{F}_r}{(dx^4)^{j-i}}$ für $x^4 = x_0{}^4$ zu nehmen ist und die

$$\varepsilon_i^r \equiv \left[\frac{\partial^i \xi^r}{(\partial x^4)^i}\right]_{x^4 = x_0{}^4}$$

willkürliche Raumfunktionen sind. Die Gruppe $\overline{\mathfrak{S}}$ ist in jedem Punkte des Schnittes eine $r_0(j-k)$-parametrige invariante Untergruppe. Die im § 6 betrachtete Gruppe (52) ist eine Untergruppe davon.

§ 8. Kovarianz des Verfahrens gegenüber der Gruppe

Mittels der im Vorangehenden gewonnenen Ergebnisse sind wir nunmehr imstande, die Frage nach der Kovarianz des Verfahrens leicht zu erledigen.

Die Formel (45) besagt, daß bei einer beliebigen Transformation der Gruppe jedes Funktional $\Phi(Q, \mathfrak{P})$ einer unitären Ähnlichkeitstransformation von der Gestalt

$$\Phi' = S^{-1}\Phi S \tag{66}$$

unterworfen ist, wobei nach (58) S zeitunabhängig ist.

Ferner gilt, wie leicht einzusehen [1]), Formel (45) auch für infinitesimale Transformationen $\overline{\mathfrak{N}}$ der Gruppe, d. h. es ist,

1) Ersetzt man in

$$\Phi' = \Phi + \frac{1}{\omega}[\overline{\mathfrak{N}}, \Phi]$$

Φ durch

$$\tilde{\Phi} = \Phi + \frac{1}{\omega}[\overline{\mathfrak{M}}, \Phi]$$

und Φ' durch

$$\tilde{\Phi}' = \Phi' + \frac{1}{\omega}[\overline{\mathfrak{M}}, \Phi'],$$

so kommt nach leichter Rechnung

$$\tilde{\Phi}' = \tilde{\Phi} + \frac{1}{\omega}\left[\overline{\mathfrak{N}} + \frac{1}{\omega}[\overline{\mathfrak{M}}, \overline{\mathfrak{N}}],\ \tilde{\Phi}\right].$$

Vgl. auch E. Noether, Gött. Nachr. 1918, S. 252.

wenn man alle Feldgrößen der infinitesimalen Transformation $\overline{\mathfrak{M}}$ unterwirft,

$$\omega\,\delta^* \overline{\mathfrak{N}} = [\overline{\mathfrak{M}}, \overline{\mathfrak{N}}], \tag{67}$$

daher allgemeiner

$$\overline{\mathfrak{N}}' = S^{-1}\,\overline{\mathfrak{N}}\,S. \tag{67'}$$

Aus (66) folgt unmittelbar die Invarianz der kanonischen V.-R. (37). Nach (35) besteht die Hamiltonfunktion aus einem nur von Q und $\mathfrak{P}$ abhängigen Funktional $\mathfrak{H}_0$ und einem Anteil $\overline{\lambda^r \mathfrak{F}_r}$, der nach § 6 eine spezielle infinitesimale Transformation $\overline{\mathfrak{N}}$ darstellt. Wegen (66) und (67′) erleiden also auch die kanonischen Feldgleichungen (38) eine (zeitlich konstante) unitäre Transformation, bei der sie bekanntlich invariant bleiben.

Es bleibt noch übrig, die Variation der linken Seiten $\mathfrak{F}_r$ der Identitäten (29) zu untersuchen. Nach (67) beträgt sie

$$\omega\,\delta^* \mathfrak{F}_r = [\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{F}_r]. \tag{68}$$

Nun gilt infolgedessen, daß die durch (65) definierte Gruppe $\overline{\mathfrak{S}}$ eine invariante Untergruppe ist,

$$[\overline{\mathfrak{M}}, \mathfrak{F}_r] = \sum_{i=k+1}^{i=j} \alpha_i^{rs}\,\frac{d^{j-i}\mathfrak{F}_s}{(dx^4)^{j-i}}\,. \tag{68'}$$

Gemäß (68) und (68′) sind also die $\delta^* \mathfrak{F}_r = 0$, d. h. die eigentlichen Identitäten $\mathfrak{F}_r = 0$ invariant, und zwar vermöge der Identitäten selber und eventuell deren zeitlichen Ableitungen.

§ 9. Erweiterung der Theorie auf den „zweiten Fall“ des § 1

Wir deuten kurz an, wie sich die vorige Theorie auf den am Ende des § 1 definierten „zweiten Fall“ ausdehnt.

Unsere Gruppe habe also die einfache Form:

$$\left\{\begin{aligned} \delta x^\nu &= 0 \\ \delta Q_\alpha &= c_{\alpha r}\,\xi^r\,. \end{aligned}\right. \tag{69}$$

Mit

$$\mathfrak{L}' \equiv \frac{d}{dx^\nu}\,[\mathfrak{f}^{\nu,\,\alpha\varrho}(Q)\,Q_{\alpha,\,\varrho}] \tag{14}$$

ist nach (12)

$$\delta(\mathfrak{L} + \mathfrak{L}') = 0. \tag{70}$$

1. Berechnen wir zunächst $\delta\mathfrak{L}'$. Ich behaupte, daß $\delta\mathfrak{L}'$ die Form

$$\delta\mathfrak{L}' = \frac{d}{dx^\nu}(\mathfrak{N}^{\alpha\nu}\,\delta Q_\alpha) \tag{71}$$

oder

$$\delta\mathfrak{L}' = \frac{d}{dx^\nu}(\mathfrak{J}_r{}^\nu\,\xi^r) \tag{72}$$

annimmt.

Denn wir bekommen zunächst

$$\delta\mathfrak{L}' = \frac{d}{dx^\nu}\left\{\frac{\partial\mathfrak{f}^{\nu,\alpha\varrho}}{\partial Q_\beta}\,c_{\beta r}\,\xi^r\,Q_{\alpha,\varrho} + \mathfrak{f}^{\nu,\alpha\varrho}\,\frac{d(c_{\alpha r}\,\xi^r)}{dx^\varrho}\right\};$$

setzen wir

$$\mathfrak{r}^{\alpha\nu} = -\frac{d\,\mathfrak{f}^{\nu,\alpha\varrho}}{dx^\varrho} + Q_{\beta,\varrho}\,\frac{\partial\mathfrak{f}^{\nu,\beta\varrho}}{\partial Q_\alpha} \tag{73}$$

und

$$\mathfrak{J}_r{}^\nu = \mathfrak{r}^{\alpha\nu}\,c_{\alpha r}, \tag{74}$$

so wird

$$\delta\mathfrak{L}' = \frac{d}{dx^\nu}\left\{\mathfrak{J}_r{}^\nu\,\xi^r + \frac{d}{dx^\varrho}(\mathfrak{f}^{\nu,\alpha\varrho}\,c_{\alpha r}\,\xi^r)\right\}. \tag{75}$$

Jetzt benutzen wir (70) und drücken aus, daß die Koeffizienten der zweiten Ableitungen der ξ^r identisch verschwinden. Da $\mathfrak{L}$ keine zweiten Ableitungen der ξ^r enthält, so wird nach (75)

$$(\mathfrak{f}^{\nu,\alpha\varrho} + \mathfrak{f}^{\varrho,\alpha\nu})\,c_{\alpha r} \equiv 0\,. \tag{76}$$

Infolgedessen reduziert sich (75) zu

$$\delta\mathfrak{L}' = \frac{d}{dx^\nu}(\mathfrak{J}_r{}^\nu\,\xi^r).$$

Setzen wir noch

$$\mathfrak{N}^{\alpha\nu} = \mathfrak{r}^{\alpha\nu} \tag{77}$$

und bemerken, daß statt (74) auch

$$\mathfrak{J}_r{}^\nu = \mathfrak{N}^{\alpha\nu}\,c_{\alpha r} \tag{74}$$

geschrieben werden darf, so haben wir die Formeln (71) und (72) bewiesen.

2. Jetzt stellen wir die Analoga der Identitäten (28) auf, die im ersten Falle auch eigentliche Identitäten (29) enthielten.

Dazu haben wir bloß die Koeffizienten der $\frac{d\,\xi^r}{d\,x^\nu}$ in (70) gleich Null zu setzen. Das liefert uns

$$\underline{(\mathfrak{P}^{\alpha\nu} + \mathfrak{R}^{\alpha\nu})\, c_{\alpha r}} = 0\,, \tag{78}$$

Insbesondere für $\nu = 4$:

$$\underline{(\mathfrak{P}^{\alpha} + \mathfrak{R}^{\alpha 4})\, c_{\alpha r}} = 0\,,$$

oder, indem wir wiederum

$$\mathfrak{F}_r \equiv \underline{\mathfrak{P}^\alpha\, c_{\alpha r}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{J}_r^{\,4} \equiv \mathfrak{J}_r$$

setzen,

$$\mathfrak{F}_r + \mathfrak{J}_r = 0\,. \tag{79}$$

3. Die Identitäten (79) sind eigentliche, d. h. es ist

$$\frac{\partial\, \mathfrak{J}_r}{\partial\, \dot{Q}_\alpha} = 0\,. \tag{80}$$

Allgemeiner wollen wir statt (80) beweisen, daß

$$\underline{\frac{\partial\, (\mathfrak{r}^{\beta\varrho}\, c_{\beta r})}{\partial\, Q_{\alpha,\nu}} = -\, \frac{\partial\, (\mathfrak{r}^{\beta\nu}\, c_{\beta r})}{\partial\, Q_{\alpha,\varrho}}}\,, \tag{80'}$$

woraus (80) nach (74) für $\nu = \varrho = 4$ folgt.

Zu dem Zweck setzen wir den Koeffizienten von ξ_r in (70) gleich Null: es ist ein in den zweiten Ableitungen $Q_{\alpha,\varrho\nu}$ linearer Ausdruck, mit nur von Q abhängigen Koeffizienten. Da dieser Ausdruck für beliebige $Q_{\alpha,\varrho\nu}$ identisch verschwindet, können wir insbesondere den $Q_{\alpha,\varrho\nu}$ c-Zahlwerte zuschreiben und dann die Koeffizienten der $Q_{\alpha,\varrho\nu}$ getrennt gleich Null setzen. Unter Benutzung der für beliebiges $\mathfrak{K}^\varrho(Q_\alpha;\, Q_{\alpha,\nu})$ gültigen Formel:

$$\frac{\partial}{\partial\, Q_{\alpha,\nu}}\, \frac{d}{d\,x^\varrho}\, \mathfrak{K}^\varrho(Q_\alpha;\, Q_{\alpha,\nu}) = \frac{\partial\, \mathfrak{K}^\nu}{\partial\, Q_\alpha} + \frac{d}{d\,x^\varrho}\, \frac{\partial\, \mathfrak{K}^\varrho}{\partial\, Q_{\alpha,\nu}}\,, \tag{81}$$

finden wir für diese Koeffizienten nach (71) und (73)

$$\underline{\frac{\partial\, (\mathfrak{r}^{\beta\varrho}\, c_{\beta r})}{\partial\, Q_{\alpha,\nu}} + \frac{\partial\, (\mathfrak{r}^{\beta\nu}\, c_{\beta r})}{\partial\, Q_{\alpha,\varrho}}}\,,$$

deren Nullsetzen (80') ergibt.

Gemäß (81) folgt übrigens aus (73)

$$\frac{\partial\, \mathfrak{r}^{\alpha\nu}}{\partial\, Q_{\beta,\varrho}} = \frac{\partial\, \mathfrak{f}^{\nu,\beta\varrho}}{\partial\, Q_\alpha} - \frac{\partial\, \mathfrak{f}^{\nu,\alpha\varrho}}{\partial\, Q_\beta} = \frac{\partial\, \mathfrak{R}^{\alpha\nu}}{\partial\, Q_{\beta,\varrho}}\,; \tag{82}$$

danach können wir statt (80′) auch

(83) $$\frac{\partial(\mathfrak{R}^{\beta\varrho}c_{\beta r})}{\partial Q_{\alpha,\nu}} = -\frac{\partial(\mathfrak{R}^{\beta\nu}c_{\beta r})}{\partial Q_{\alpha,\varrho}}$$

schreiben.

4. Die Ausführungen der §§ 3 und 4 sind auf den jetzigen Fall wörtlich übertragbar, *indem* $\mathfrak{P}^\alpha + \mathfrak{R}^{\alpha 4}$ *die Rolle von* $\mathfrak{P}^\alpha$ *vertritt.*

Der im § 5 abgeleitete Ausdruck $\overline{\mathfrak{M}}$ der infinitesimalen Transformation erleidet eine analoge Modifikation, da $\mathfrak{P}^{\alpha\nu}$ jetzt keine Tensordichte mehr ist.[1])

Vielmehr ist jetzt nach (50) und (70)

$$\delta\mathfrak{P}^{\alpha\nu} = -\mathfrak{P}^{\beta\nu}\frac{\partial\,\delta Q_\beta}{\partial Q_\alpha} - \frac{\partial(\delta\mathfrak{L}')}{\partial Q_{\alpha,\nu}};$$

nach (71) ist aber, gemäß (81),

$$\frac{\partial(\delta\mathfrak{L}')}{\partial Q_{\alpha,\nu}} = \frac{\partial(\mathfrak{R}^{\beta\nu}\,\delta Q_\beta)}{\partial Q_\alpha} + \frac{d}{dx^\varrho}\frac{\partial(\mathfrak{R}^{\beta\varrho}\,\delta Q_\beta)}{\partial Q_{\alpha,\nu}},$$

d. h. mit Rücksicht auf (83)

(84) $$\delta\mathfrak{P}^{\alpha\nu} = -\mathfrak{P}^{\beta\nu}\frac{\partial\,\delta Q_\beta}{\partial Q_\alpha} - \frac{\partial(\mathfrak{R}^{\beta\nu}\,\delta Q_\beta)}{\partial Q_\alpha} + \frac{d}{dx^\varrho}\frac{\partial(\mathfrak{R}^{\beta\nu}\,\delta Q_\beta)}{\partial Q_{\alpha,\varrho}}.$$

Insbesondere wird das wegen (80) für $\nu = 4$

$$\delta\mathfrak{P}^\alpha = -\mathfrak{P}^\beta\frac{\partial\,\delta Q_\beta}{\partial Q_\alpha} - \frac{\partial(\mathfrak{R}^{\beta 4}\,\delta Q_\beta)}{\partial Q_\alpha} + \frac{d}{dx^{\bar\varrho}}\frac{\partial(\mathfrak{R}^{\beta 4}\,\delta Q_\beta)}{\partial Q_{\alpha,\bar\varrho}},$$

d. h.

(85) $$\omega\,\delta\mathfrak{P}^\alpha = [\overline{\mathfrak{N}}, \mathfrak{P}^\alpha],$$

mit

(86) $$\overline{\mathfrak{N}} = (\mathfrak{P}^\alpha + \mathfrak{R}^{\alpha 4})\,\delta Q_\alpha.$$

Wiederum wegen (80) ist auch

(87) $$\omega\,\delta Q_\alpha = [\overline{\mathfrak{N}}, Q_\alpha],$$

so daß wir in $\overline{\mathfrak{N}}$ die gesuchte Erweiterung von $\overline{\mathfrak{M}}$ haben.

---

1) Obwohl weder $\mathfrak{P}^{\alpha\nu}$ noch $\mathfrak{R}^{\alpha\nu}$ Tensordichten sind, läßt sich leicht zeigen, daß $\mathfrak{P}^{\alpha\nu} + \mathfrak{R}^{\alpha\nu}$ dennoch eine Tensordichte ist.

Aus dem Ausdruck (86) folgt genau wie im § 6, daß die linken Seiten $\mathfrak{F}_r + \mathfrak{J}_r$ der eigentlichen Identitäten auf Grund derselben untereinander vertauschbar sind.

Die Überlegungen von § 7 über die zeitliche Konstanz von $\overline{\mathfrak{M}}$, sowie der Kovarianzbeweis von § 8, lassen sich ohne weiteres auf $\overline{\mathfrak{N}}$ übertragen. Insbesondere spielen hier, da $j = 0$ vorausgesetzt wurde, die Identitäten $\mathfrak{F}_r + \mathfrak{J}_r = 0$ die Rolle der fehlenden Feldgleichungen.

§ 10. Bemerkung über die gleichzeitige Behandlung mehrerer Gruppen

Auf den Fall, daß die Lagrangefunktion mehrere Gruppen gestattet, ist die obige Theorie ohne weiteres anwendbar, wenn man bedenkt, daß die infinitesimale Transformation des direkten Produktes aller betrachteten Gruppen sich additiv aus denen der einzelnen Gruppen zusammensetzt. Insbesondere sind die sich auf jede einzelne Gruppe beziehenden $\mathfrak{F}_r$ nicht nur untereinander (vermöge $\mathfrak{F}_r = 0$) vertauschbar, sondern auch mit den zu den anderen Einzelgruppen gehörigen $\mathfrak{F}_r$. Es ist auch zulässig, daß der „erste Fall" ($\mathfrak{L}$ ist eine Dichte) für gewisse Einzelgruppen, der im § 9 behandelte „zweite Fall" dagegen für gewisse anderen auftritt. Dann sind für die letzteren die $\mathfrak{F}_r$ einfach durch $\mathfrak{F}_r + \mathfrak{J}_r$ zu ersetzen: sie sind wiederum nicht nur untereinander, sondern auch mit den anderen $\mathfrak{F}_r$ vertauschbar.

Diese Bemerkung hat zur Folge, daß man die einzelnen Gruppen, welche eine gegebene Lagrangefunktion gestattet, getrennt behandeln kann.

Zweiter Teil: **Anwendungen**

§ 11. Die Lagrangefunktion

Wir wollen eine Lagrangefunktion aufstellen, die sowohl das elektromagnetische und Materiefeld als auch das Gravitationsfeld umfaßt. Was das letztere betrifft, so übernehmen wir die von Fock[1]) und Weyl[2]) vorgeschlagene Theorie des Einkörperproblems: das Gravitationsfeld beschreiben wir durch

1) V. Fock, Ztschr. f. Phys. **57**. S. 261. 1929.
2) H. Weyl, Ztschr. f. Phys. **56**. S. 330. 1929.

Angabe in jedem Punkt von vier orthogonalen Vektoren $h_{i,\nu}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ und wir fordern, daß die Naturgesetze kovariant sind gegenüber einer *vom Punkte abhängigen* Lorentztransformation der „Vierbeine" $h_{i,\nu}$; diese Kovarianz, die wir nach Levi-Cività [1]) „echte Beinkovarianz" nennen, unterscheidet sich wesentlich von der in der Einsteinschen Theorie des Fernparallelismus geforderten „lokalen Beinkovarianz", nach der alle Vierbeine miteinander starr verbunden sind (*konstante* Lorentztransformation der Vierbeine). Im Einklang mit Fock (und im Gegensatz zu Weyl) beschreiben wir das Materiefeld durch *vier*komponentige Wellenfunktionen $\psi \equiv (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$. Für das elektromagnetische Feld wählen wir als Variable die Komponenten φ_μ des Viererpotentials.[2])

Die Lagrangefunktion setzt sich additiv zusammen aus drei Anteilen, die den drei genannten Feldern entsprechen (und gleichzeitig die Wechselwirkungen der Felder aufeinander enthalten).

Wenn

$$E_{\mu\nu} = \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^\nu} \tag{88}$$

den elektromagnetischen Feldtensor darstellt, so ist der Strahlungsanteil der Lagrangefunktion

$$\mathfrak{E} = \tfrac{1}{4} E_{\mu\nu} \mathfrak{E}^{\mu\nu}; \tag{89}$$

dabei bedeutet

$$\mathfrak{E}^{\mu\nu} = E^{\mu\nu} h'$$

wo h' die Determinante der $h_{i,\nu}$ und $E^{\mu\nu}$ die kontravarianten Komponenten des Tensors $E_{\mu\nu}$ bezeichnet.

Um den Materieanteil aufzuschreiben, legen wir ein spezielles System Diracscher Matrizen fest.[3]) Gehen wir aus von den Paulischen Matrizen

$$\varrho_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \varrho_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \varrho_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{90}$$

---

1) Berliner Berichte 1929, S. 137.

2) Da wir $x^4 = ct$ gesetzt haben, ist $\varphi_4 = -\varphi$, wo φ das skalare Potential darstellt.

3) Dasselbe weicht von dem Fockschen (a. a. O.) nur unwesentlich ab. Der wesentliche Zug der Spezialisierung ist $\alpha_4 = 1$ (in der Fockschen Bezeichnung $\alpha_0 = 1$).

so setzen wir

$$(91)\qquad \begin{cases} \alpha_{\bar{l}} = -i\begin{pmatrix}\varrho_{\bar{l}} & 0\\ 0 & -\varrho_{\bar{l}}\end{pmatrix} & (\bar{l} = 1, 2, 3)\\ \alpha_4 = 1\,. \end{cases}$$

Führen wir noch die Bezeichnung

$$(92)\qquad e_{\bar{k}} = -1, \quad e_4 = 1$$

ein, so sind die Matrizen α_l hermitisch und haben die Vertauschungseigenschaft

$$(93)\qquad \alpha_m\,\alpha_k\,e_k + \alpha_k\,\alpha_m\,e_m = 2e_m\,\delta_{mk}\,.$$

Ferner brauchen wir noch die Matrix

$$(94)\qquad \sigma = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

(worin die Einser zweireihige Einheitsmatrizen darstellen).

In bezug auf die lateinischen Indizes ist über zweimal auftretende Indizes zu summieren, wobei die Faktoren e_k zur Abzählung der Indizes unberücksichtigt bleiben sollen. Neben die $h_{i,\nu}$ treten die kontravarianten h_i^{ν} und es gelten die Relationen

$$(95)\qquad \begin{cases} h_k^{\nu} h_{l,\nu} = e_k\,\delta_{kl}\,,\\ e_k h_k^{\nu} h_{k,\mu} = \delta_{\mu}\,, \end{cases}$$

welche die Orthogonalität der Vierbeine im Raume mit der Maßbestimmung

$$(96)\qquad g_{\mu\nu} = e_k h_{k,\mu} h_{k,\nu}$$

ausdrücken.

Bedeutet noch

$$(97)\qquad \eta^{l}_{\varrho\sigma} = \frac{\partial h_{l,\varrho}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial h_{l,\sigma}}{\partial x^{\varrho}}$$

und

$$(98)\qquad 2\gamma_{mkl} = \underline{\left(\eta^{l}_{\varrho\sigma}\,h^{\sigma}_{m}\,h^{\varrho}_{k} + \eta^{m}_{\varrho\sigma}\,h^{\sigma}_{l}\,h^{\varrho}_{k} + \eta^{k}_{\varrho\sigma}\,h^{\sigma}_{m}\,h^{\varrho}_{l}\right) h'},$$

ferner

$$(99)\qquad C_l = \frac{1}{4}\,e_k\,\alpha_m\,\alpha_k\,\gamma_{mkl} + \frac{e}{\omega}\,\varphi_{\sigma}\,h_l^{\sigma}\,h', \qquad \left(\omega = \frac{h\,c}{2\pi i}\right)$$

$$(100)\qquad \gamma^{\sigma} = e_k\,\alpha_k\,h_k^{\sigma}\,h',$$

so lautet der Materieanteil der Lagrangefunktion:

$$(101)\qquad \boldsymbol{R}\,\omega\,\psi^{*}\left(\gamma^{\sigma}\,\frac{\partial\psi}{\partial x^{\sigma}} - e_l\,\alpha_l\,C_l\,\psi\right) - m\,c^2\,\psi^{*}\,\sigma\,\psi\,h'\,.$$

[x^* = komplex konjugiertes von x, $\boldsymbol{R}\,x$ = Realteil von x, $\boldsymbol{I}\,x$ = Imaginärteil von x].

Nun ist [vgl. Fock, a. a. O. Formel (24)]

$$e_l(\alpha_l C_l + C_l^\dagger \alpha_l) = -\frac{\partial \gamma^\sigma}{\partial x^\sigma}$$

und infolgedessen

$$\boldsymbol{I}\,\omega\,\psi^* \left(\gamma^\sigma \frac{\partial \psi}{\partial x^\sigma} - e_l \alpha_l C_l \psi\right) = \frac{\omega}{2} \frac{\partial}{\partial x^\sigma}(\psi^* \gamma^\sigma \psi). \tag{102}$$

Wir können also für den Materieanteil statt (101)

$$\mathfrak{W} = \omega\,\psi^* \left(\gamma^\sigma \frac{\partial \psi}{\partial x^\sigma} - e_l \alpha_l C_l \psi\right) - m\,c^2\,\psi^*\,\sigma\,\psi\,h' \tag{103}$$

setzen.

Für den Gravitationsanteil nehmen wir $\frac{1}{2\varkappa}\mathfrak{G}$, wo $\varkappa = \frac{8\pi f}{c^4}$ (f = Newtonsche Gravitationskonstante) und

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{G} = {} & e_k e_l \eta^l_{\varrho\sigma} h_l{}^\varrho h_k{}^{\varrho'} g^{\sigma\sigma'} h' \eta^k_{\varrho'\sigma'} - \tfrac{1}{2} e_k e_l \eta^l_{\varrho\sigma} h_l{}^{\varrho'} h_k{}^\varrho g^{\sigma\sigma'} h' \eta^k_{\varrho'\sigma'} \\ & - \tfrac{1}{4} e_l \eta^l_{\varrho\sigma} g^{\sigma\sigma'} g^{\varrho\varrho'} h' \eta^l_{\varrho'\sigma'}; \end{aligned}\right. \tag{104}$$

wie man leicht nachrechnet (vgl. etwa Weyl, a. a. O.) unterscheidet sich $\mathfrak{G}$ von der skalaren Krümmungsdichte $\mathfrak{R}$ um eine Divergenz:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{G} - 2\frac{d}{dx^\nu}\left(e_l h_l{}^\nu \frac{\partial (h_l{}^\sigma h')}{\partial x^\sigma}\right). \tag{105}$$

Insgesamt ist also

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2\varkappa}\mathfrak{G} + \mathfrak{E} + \mathfrak{W}. \tag{106}$$

Zum Unterschied gegenüber der gewöhnlichen Form der Relativitätstheorie, wo die Feldgrößen $g_{\mu\nu}$ keine Vektoren, sondern Tensoren 2. Stufe waren, sind in (105) die beiden Bestandteile $\mathfrak{G}$ und $2\frac{d}{dx^\nu}\left(e_l h_l{}^\nu \frac{\partial (h_l{}^\sigma h')}{\partial x^\sigma}\right)$ von $\mathfrak{R}$ skalare Dichten bezüglich der allgemeinen relativistischen Transformationsgruppe. Dagegen ist nicht $\mathfrak{G}$ allein, sondern erst $\mathfrak{R}$ echt beininvariant.

§ 12. Die Eichinvarianzgruppe

Die einfachste Gruppe, die unsere Funktion $\mathfrak{L}$ gestattet, ist die Eichinvarianzgruppe, bei welcher die x^ν und die Variabeln $h_{i,\nu}$ invariant bleiben, während sich die φ_ν und ψ folgendermaßen transformieren:

$$(107)\qquad \begin{cases} \delta\varphi_\nu = \dfrac{\partial \xi}{\partial x^\nu}, \\ \delta\psi = -\dfrac{e}{\omega}\,\xi\,\psi. \end{cases}$$

Gegenüber dieser Gruppe ist $\delta\mathfrak{L} = 0$.

Setzen wir, um den Vergleich mit der allgemeinen Theorie zu erleichtern[1]),

$$\varphi_\nu = Q_\nu, \qquad \psi = Q_5,$$

so haben wir

$$c_\nu{}^\mu = \delta_\nu{}^\mu, \qquad c_5{}^\mu = 0$$

und folglich als einzige eigentliche Identität

$$(108)\qquad \mathfrak{P}^4 = 0.$$

Das folgt natürlich aus der direkten Ausrechnung der $\mathfrak{P}^{\alpha\nu}$:

$$(109)\qquad \begin{cases} \mathfrak{P}^{\mu\nu} = \mathfrak{F}^{\nu\mu}, \\ \mathfrak{P}^{5\nu} = \omega\,\psi^*\,\gamma^\nu. \end{cases}$$

Um dieses einfache Beispiel weiter zu diskutieren, sehen wir zunächst von der Gravitation ab, d. h. setzen wir $h_{i,\nu} = \delta_{i\nu}$.

Die Hamiltonfunktion hat dann die Form

$$(110)\qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 + \lambda\,\mathfrak{P}^4,$$

wo $\mathfrak{H}_0$ z. B. die in H. P. II gewählte spezielle Hamiltonfunktion ist, welche $\mathfrak{P}^4$ nicht enthält.

Die Feldgleichungen lauten

$$(111)\qquad \begin{cases} \omega\,\dot{Q}_{\bar\nu} = [\mathfrak{H}_0, Q_{\bar\nu}], \\ \dot{Q}_4 = \lambda, \\ \omega\,\dot{Q}_5 = [\mathfrak{H}_0, Q_5]; \end{cases}$$

$$(112)\qquad \omega\,\dot{\mathfrak{P}}^\alpha = [\mathfrak{H}_0, \mathfrak{P}^\alpha], \quad (\alpha = 1, \ldots, 5);$$

1) Da die ψ nicht hermitisch sind, so sind dem allgemeinen Schema geringe Modifikationen anzubringen, um es auch diesen Variablen anzupassen. Darauf brauchen wir aber nicht näher einzugehen.

da ferner $j = 1$ ist, so haben wir als Nebenbedingung [1]) außer (108)

$$[\overline{\mathfrak{H}}_0, \mathfrak{P}^4] = 0: \tag{113}$$

Also bleibt in (111) λ wesentlich unbestimmt und die vierte Gleichung (112) wird durch (113) ersetzt.

Die infinitesimale Transformation $\overline{\mathfrak{M}}$ lautet hier:

$$\overline{\mathfrak{M}} = \int \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial x^\nu} \mathfrak{E}^{4\nu} - e\, \xi\, \psi^* \gamma^4 \psi \right\} dx^1 dx^2 dx^3$$

oder durch partielle Integration

$$\overline{\mathfrak{M}} = \int \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial x^4} \mathfrak{P}^4 - \xi \left[\frac{\partial \mathfrak{E}^{4\nu}}{\partial x^\nu} + e\, \psi^* \gamma^4 \psi \right] \right\} dx^1 dx^2 dx^3.$$

Die eckige Klammer ist nichts anderes als $1/\omega\, [\overline{\mathfrak{H}}_0, \mathfrak{P}^4]$ oder $\dot{\mathfrak{P}}^4$, so daß

$$\overline{\mathfrak{M}} = \int \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial x^4} \mathfrak{P}^4 - \xi \frac{d \mathfrak{P}^4}{d x^4} \right\} dx^1 dx^2 dx^3, \tag{114}$$

in Übereinstimmung mit (63').

Nach der allgemeinen Theorie muß $\dot{\mathfrak{P}}^4 = 0$ vermöge der Feldgleichungen und Identitäten identisch erfüllt sein; das ist in der Tat die Kontinuitätsgleichung der Elektrizität.

§ 13. Die allgemeine relativistische Kovarianz

Bei einer beliebigen Koordinatentransformation

$$\delta x^\nu = \xi^\nu \tag{115}$$

ist

$$\delta h_{i,\nu} = - h_{i,\mu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu}, \tag{115'}$$

ferner

$$\begin{cases} \delta \varphi_\nu = - \varphi_\mu \dfrac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu}, \\ \delta \psi = 0. \end{cases} \tag{115''}$$

Die Lagrangefunktion verhält sich dabei wie eine skalare Dichte.

Behalten wir die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen für die zu den φ_ν und ψ konjugierten Impulsen bei, und

1) Mit den Bezeichnungen von H.P.II lautet (113) $C = 0$.

stellen wir die zu den $h_{i,\nu}$ gehörigen $\mathfrak{P}^{\alpha\mu}$ durch $\mathfrak{P}_i^{\nu\mu}$ dar, so lauten die uneigentlichen Identitäten (28) im jetzigen Falle:

$$\varphi_\varrho(\mathfrak{S}^{\mu\nu} + \mathfrak{S}^{\nu\mu}) + h_{i,\varrho}(\mathfrak{P}_i^{\nu\mu} + \mathfrak{P}_i^{\mu\nu}) = 0,$$

mit Rücksicht darauf, daß $\mathfrak{S}^{\mu\nu} + \mathfrak{S}^{\nu\mu} = 0$ ist, reduzieren sie sich zu

$$\mathfrak{P}_i^{\nu\mu} + \mathfrak{P}_i^{\mu\nu} = 0 \tag{116}$$

und haben also die vier eigentlichen Identitäten

$$\mathfrak{P}_i^{4} = 0 \tag{117}$$

zur Folge.

Die direkte Berechnung ergibt in der Tat (116), da $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{W}$ von den $h_{i,\nu,\mu}$ nur durch die $\eta^i_{\tau\sigma}$ abhängen und

$$\frac{\partial \eta^i_{\varrho\sigma}}{\partial h_{i,\nu,\mu}} = \delta^\nu_\varrho \delta^\mu_\sigma - \delta^\mu_\varrho \delta^\nu_\sigma,$$

d. h. antisymmetrisch in μ und ν ist. Man findet

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}_i^{\nu\mu} = {} & \big[\eta^i_{\varrho\sigma} g^{\nu\sigma} g^{\mu\varrho} + 2 e_l \eta^l_{\varrho\sigma} h^\varrho_l (g^{\sigma\mu} h_i^{\nu} - g^{\sigma\nu} h_i^{\mu}) \\ & - e_l \eta^l_{\varrho\sigma} h_i^\varrho (h_l^{\nu} g^{\sigma\mu} - h_l^{\mu} g^{\sigma\nu})\big] e_i h' \cdot \frac{1}{2\varkappa} \\ & - \boldsymbol{R} \frac{\omega}{4} \psi^* \alpha_l \alpha_m \alpha_k \psi e_l e_k \frac{\partial \gamma_{mkl}}{\partial h_{i,\nu,\mu}}. \end{aligned}\right\} \tag{118}$$

Die infinitesimale Transformation $\overline{\mathfrak{M}}$ nimmt die Form an:

$$\overline{\mathfrak{M}} = -\int dx^1 dx^2 dx^3 \left\{ \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^4} (h_{i,\mu} \mathfrak{P}_i^4 + \varphi_\mu \mathfrak{P}^4) - \xi^\mu \left[\frac{\partial}{\partial x^{\bar\nu}} (h_{i,\mu} \mathfrak{P}_i^{\bar\nu} + \varphi_\mu \mathfrak{P}^{\bar\nu}) + \mathfrak{G}_\mu\right]\right\};$$

betrachten wir insbesondere die Translation $\xi^\mu = \varepsilon^\mu = \text{const}$ so liefert $\frac{d\overline{\mathfrak{M}}}{dx^4} = 0$ den Energieimpulssatz

$$\overline{\mathfrak{G}}_\mu = \text{const};$$

für eine lineare Transformation, bekommen wir daraus eine Verallgemeinerung der Drehimpulssätze (vgl. H. P. II, S. 177).

Nach der allgemeinen Theorie (§ 7) liefert das Nullsetzen des Koeffizienten von ξ^μ eine Nebenbedingung:

$$\mathfrak{G}_\mu + \frac{\partial}{\partial x^{\bar\nu}} (h_{i,\mu} \mathfrak{P}_i^{\bar\nu} + \varphi_\mu \mathfrak{P}^{\bar\nu}) = 0. \tag{119}$$

F. Klein[1]) hat bereits in anderem Zusammenhang bemerkt, daß (119) mit 4 Feldgleichungen äquivalent ist.

§ 14. Die echte Beinkovarianz

Für diese Gruppe ist

$$(120) \qquad \begin{cases} \delta x^\nu = 0\,, & \delta \varphi_\mu = 0\,, \\ \delta h_{i,\nu} = e_k \xi_{ik} h_{k,\nu}\,, & (\xi_{ik} = -\xi_{ki}) \end{cases}$$

und, wie man auf Grund von (120) leicht findet,

$$(120') \qquad \delta \psi = \tfrac{1}{4} e_k \xi_{ik} \alpha_i \alpha_k \psi\,.$$

Hier haben wir ein Beispiel des im § 9 behandelten „zweiten Falles“ vor uns. Denn $\mathfrak{G}$ ist nur lokalbeininvariant und erst $\mathfrak{R}$ ist echt beininvariant; $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{E}$ sind echt beininvariant.

Um nach Formel (74) $\mathfrak{J}_r^{\,\nu} \equiv \mathfrak{J}^\nu_{(ik)}$ auszurechnen, ist es am zweckmäßigsten, vorübergehend als Variable

$$Q_l^{\,\alpha} \equiv h' h_l^{\,\alpha}$$

zu wählen. Dann ist nach (105)

$$\mathfrak{f}_l^{\,\nu,\alpha\varrho} = -\frac{1}{\varkappa} e_l h_l^{\,\nu} \delta_o^{\,\alpha}$$

und nach (120)

$$c_{l,\alpha(ik)} = \delta_{il} e_k h_k^{\,\alpha} h' - \delta_{kl} e_i h_i^{\,\alpha} h'.$$

Unter Berücksichtigung von (71) findet man daraus leicht

$$(121) \qquad \mathfrak{J}^\nu_{(ik)} = \frac{1}{\varkappa} e_i e_k \frac{d}{dx^\varrho} (h' h_i^{\,\nu} h_k^{\,\varrho} - h' h_i^{\,\varrho} h_k^{\,\nu})\,.$$

Zur Berechnung von $\mathfrak{F}_r \equiv \mathfrak{F}_{(ik)}$ ist es bequemer, zu den ursprünglichen Variablen $Q_{l,\alpha} \equiv h_{l,\alpha}$ und $Q_5 = \psi$ zurückzukehren. Dann ist

$$c_{l,\alpha(ik)} = \delta_{il} e_k h_{k,\alpha} - \delta_{kl} e_i h_{i,\alpha}\,,$$

ferner nach (120′)

$$c_{5\,(ik)} = \tfrac{1}{4} (e_k \alpha_i \alpha_k \psi - e_i \alpha_k \alpha_i \psi)$$

zu setzen. Danach ist

$$\mathfrak{F}_{(ik)} = \underline{\mathfrak{P}_i^{\,\nu} e_k h_{k,\nu} - \mathfrak{P}_k^{\,\nu} e_i h_{i,\nu}} + \frac{\omega}{4} e_k e_l h' h_l^{\,4} \psi^* (\alpha_l \alpha_i \alpha_k - \alpha_l \alpha_k \alpha_i) \psi.$$

---

1) Gött. Nachr. 1918, S. 185.

Nun ist nach (98)

$$\frac{\partial \gamma_{mjl}}{\partial h_{i,\nu,4}} e_k h_{k,\nu} - \frac{\partial \gamma_{mjl}}{\partial h_{k,\nu,4}} e_i h_{i,\nu} = h' h_l^4 (\delta_{im}\delta_{kj} - \delta_{ij}\delta_{km});$$

setzt man also gemäß (118)

$$\mathfrak{P}_i^\nu = \tilde{\mathfrak{P}}_i^\nu - \boldsymbol{R}\frac{\omega}{4} e_l \psi^* \alpha_l \alpha_m \alpha_j \psi e_j \frac{\partial \gamma_{mjl}}{\partial h_{i,\nu,4}}, \tag{122}$$

wo also $\tilde{\mathfrak{P}}_i^\nu$ die Impulse bei Abwesenheit von Materie darstellen, so reduzieren sich die $\mathfrak{J}_{(ik)}$ auf

$$\mathfrak{J}_{(ik)} = \underline{\tilde{\mathfrak{P}}_i^\nu e_k h_{k,\nu} - \tilde{\mathfrak{P}}_k^\nu e_i h_{i,\nu}}, \tag{123}$$

wie es auch sein muß.

Gemäß (121) und (123) lauten die sechs eigentlichen Identitäten

$$\underline{\tilde{\mathfrak{P}}_i^\nu e_k h_{k,\nu} - \tilde{\mathfrak{P}}_k^\nu e_i h_{i,\nu}} + \frac{1}{\varkappa} e_i e_k \frac{d}{dx^\varrho}(h' h_i^4 h_k^\varrho - h' h_i^\varrho h_k^4) = 0, \tag{124}$$

die sich auch direkt aus (118) ergeben.

§ 15. Ergänzende Bemerkungen über das Gravitations- und Materiefeld

1. Nachdem wir in den vorigen Paragraphen skizziert haben, wie die Fock-Weylsche Theorie des Einkörperproblems gequantelt werden kann, möchten wir auf einen Punkt dieses Einkörpermodells kurz eingehen, der bei Fock und bei Weyl verschieden behandelt ist, nämlich die Aufstellung des Impulsenergietensors $\mathfrak{T}_i^\nu$ der Materie. Der Focksche Ansatz, der zu einem unsymmetrischen Tensor führt, scheint uns unzweckmäßig und wir ziehen die Weylsche Definition

$$\mathfrak{T}_i^\nu = \frac{\delta \mathfrak{W}}{\delta h_{i,\nu}} \tag{125c}$$

vor, da sie auf Grund der Feldgleichungen einen symmetrischen Tensor liefert. Da aber Weyl mit einem zweikomponentigen ψ operiert, während wir mit Fock bei der Vierkomponententheorie bleiben wollen, so wird es wohl nicht überflüssig sein, die Weylsche Berechnung von $\mathfrak{T}_i^\nu$ hier mutatis mutandis zu wiederholen.

Die Symmetrie von $\mathfrak{T}_i^{\nu}$ folgt unmittelbar aus $\delta \mathfrak{W} = 0$, wo δ die Variation (120), (120') ist. Denn man bekommt daraus durch Nullsetzen des Koeffizienten von ξ_{ik}

$$\mathfrak{T}_i^{\nu} e_k h_{k,\nu} - \mathfrak{T}_k^{\nu} e_i h_{i,\nu} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{R} \frac{\delta \mathfrak{W}}{\delta \psi} (e_k \alpha_i \alpha_k - e_i \alpha_k \alpha_i) \psi,$$

d. h.

$$\mathfrak{T}_i^{\nu} e_k h_{k,\nu} - \mathfrak{T}_k^{\nu} e_i h_{i,\nu} = 0$$

auf Grund der Feldgleichungen

$$\frac{\delta \mathfrak{W}}{\delta \psi} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\delta \mathfrak{W}}{\delta \psi^*} = 0.$$

Diese Gleichung drückt aus, daß der Tensor

$$\mathfrak{T}''_{ik} = e_i e_k \mathfrak{T}_i^{\nu} h_{k,\nu}$$

symmetrisch in bezug auf i und k ist.

Statt (125c) können wir ebensogut

$$\mathfrak{T}_i^{\nu} = \frac{\delta \boldsymbol{R} \mathfrak{W}}{\delta h_{i,\nu}} \tag{126c}$$

setzen, was uns einen reellen Tensor $\mathfrak{T}_i^{\nu}$ ergeben wird. Bequemer berechnen wir

$$\mathfrak{T}'_{i,\nu} = \frac{\delta \boldsymbol{R} \mathfrak{W}}{\delta h_i^{\nu}} = -\mathfrak{T}_k^{\varrho} e_k h_{k,\nu} h_{i,\varrho} \equiv e_i h' T_{i,\nu}. \tag{127c}$$

Auf Grund von (103) finden wir

$$\left\{\begin{aligned} T'_{i,\nu} = {} & \boldsymbol{R} \omega \psi^* \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial x^{\nu}} - e \psi^* \alpha_i \psi \varphi_{\nu} - h_{i,\nu} W \\ & + \boldsymbol{R} \frac{\omega}{4} e_k h_k^{\varrho} h_{m,\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\varrho}} \{\psi^* \alpha_i \alpha_m \alpha_k \psi\} \\ & - \boldsymbol{R} \frac{\omega}{4} e_i e_l e_k \psi^* \alpha_l \alpha_m \alpha_k \psi \left\{ \frac{\partial \gamma_{mkl}}{\partial h_i^{\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\varrho}} \frac{\partial \gamma_{mkl}}{\partial h_{i,\varrho}^{\nu}} \right\}, \\ \text{mit } W = {} & \frac{1}{h'} \mathfrak{W}. \end{aligned}\right. \tag{128c}$$

Beschränken wir uns auf die spezielle Relativität, indem wir

$$h_i^{\nu} = e_i h_{i,\nu} = \delta_{i\nu}$$

setzen. Dann wird (128c)[1])

1) Vgl. auch H. Tetrode, Ztschr. f. Phys. **49**. S. 858. 1928 Formeln (13) und (16), sowie den Text auf S. 862.

$$
(129\,\mathrm{c})\quad \left\{
\begin{aligned}
T'_{i,\nu} &= \boldsymbol{R}\,\omega\,\psi^*\alpha_i\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu} - \delta_{i\nu}W - e\,\psi^*\alpha_i\,\psi\,\varphi_\nu \\
&\quad + \boldsymbol{R}\,\frac{\omega}{4}\,e_\varrho\,e_\nu\frac{\partial}{\partial x^\varrho}(\psi^*\alpha_i\,\alpha_\nu\,\alpha_\varrho\,\psi), \\
&\text{mit} \\
W &= \boldsymbol{R}\,\omega\,e_\varrho\,\psi^*\alpha_\varrho\frac{\partial\psi}{\partial x^\varrho} - m\,c^2\,\psi^*\sigma\,\psi - e_\varrho\,e\,\psi^*\alpha_\varrho\,\psi\,\varphi_\varrho.
\end{aligned}
\right.
$$

Insbesondere ist dann

$$
T'_{44} = \boldsymbol{R}\,\omega\,\psi^*\alpha_{\bar\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\bar\varrho}} - e\,\psi^*\alpha_{\bar\varrho}\,\psi\,\varphi_{\bar\varrho} + m\,c^2\,\psi^*\sigma\,\psi,
$$

d. h. für den Energieoperator

$$
(130\,\mathrm{c})\qquad H = \alpha_{\bar\varrho}\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x^{\bar\varrho}} - \frac{e}{c}\,\varphi_{\bar\varrho}\right) + m\,c\,\sigma.
$$

Ferner ist

$$
T'_{4\bar\nu} = \boldsymbol{R}\,\omega\,\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x^{\bar\nu}} - e\,\psi^*\,\psi\,\varphi_{\bar\nu} + \boldsymbol{R}\,\frac{\omega}{4}\,\frac{\partial}{\partial x^{\bar\varrho}}\,(\psi^*\alpha_{\bar\nu}\,\alpha_{\bar\varrho}\,\psi);
$$

setzen wir

$$
(131)\qquad \alpha_1\,\alpha_2 = \mu_3
$$

und zyklisch, so wird z. B.

$$
\begin{aligned}
T'_{41} = \boldsymbol{R}\,\omega\,\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x^1} &- e\,\psi^*\,\psi\,\varphi_1 \\
&+ \frac{\omega}{4}\left\{\frac{\partial}{\partial x^2}(\psi^*\mu_3\,\psi) - \frac{\partial}{\partial x^3}(\psi^*\mu_2\,\psi)\right\}.
\end{aligned}
$$

Der Impulsoperator lautet danach:

$$
(132\,\mathrm{c})\qquad p_{\bar\nu} = \frac{h}{2\pi i}\,\frac{\partial}{\partial x^{\bar\nu}} - \frac{e}{c}\,\varphi_{\bar\nu};
$$

andererseits bekommt man für den Drehimpuls:

$$
\begin{aligned}
M_1 &= x^2\,T'_{43} - x^3\,T'_{42} \\
&= \boldsymbol{R}\,\omega\,\psi^*\left(x^2\,\frac{\partial}{\partial x^3} - x^3\,\frac{\partial}{\partial x^2}\right)\psi - e\,\psi^*\,\psi\,[x^2\,\varphi_3 - x^3\,\varphi_2) \\
&+ \frac{\omega}{4}\left\{x^2\,\frac{\partial}{\partial x^1}(\psi^*\mu_2\,\psi) - x^2\,\frac{\partial}{\partial x^2}(\psi^*\mu_1\,\psi) - x^3\,\frac{\partial}{\partial x^3}(\psi^*\mu_1\,\psi)\right. \\
&\left.+ x^3\,\frac{\partial}{\partial x^1}(\psi^*\mu_3\,\psi)\right\},
\end{aligned}
$$

folglich für den entsprechenden Operator

$$(133c)\quad \begin{cases} M_1 = \frac{h}{2\pi i}\left(x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} - x^3 \frac{\partial}{\partial x^2}\right) \\ \qquad\qquad - \frac{e}{c}(x^2 \varphi_3 - x^3 \varphi_2) + \frac{i\mu_1}{2} \cdot \end{cases}$$

2. Im Vorangehenden haben wir für die Vierbeine $h_{i,\nu}$ die Bose-Einsteinsche Statistik angenommen, d. h. die Klammersymbole in den V.-R. mit dem Minuszeichen gewählt. Nun fragt es sich, ob es möglich wäre, auch die Fermische Statistik auf die Vierbeine anzuwenden. Das Kriterium für die Zulässigkeit der V.-R. mit dem Pluszeichen ist folgendes (vgl. H.P. I, S. 29): Es sollen die *gewöhnlichen* Klammersymbole (mit dem Minuszeichen) $[\mathfrak{G}_\mu, Q_a]$, $[\mathfrak{G}_\mu, \mathfrak{P}^a]$ denselben Wert behalten, wenn man in $[Q_a, Q_\beta]$, $[\mathfrak{P}^a, \mathfrak{P}^\beta]$ und $[Q^a, \mathfrak{P}^\beta]$ das Minuszeichen durch das Pluszeichen ersetzt.

Nach diesem Kriterium ist aber die Frage bezüglich der Vierbeine zu *verneinen*. Denn man sieht aus der Form der Hamiltonfunktion (quadratisch in den $\mathfrak{P}^a$), daß $[\overline{\mathfrak{H}}_0, Q_a]$ beim Übergang vom Plus- zum Minuszeichen eine Änderung erfährt: die zum in $\mathfrak{P}^a$ quadratischen Anteil von $\mathfrak{H}_0$ gehörigen Klammersymbole sind nämlich in beiden Fällen verschieden und die Differenzen kompensieren sich nicht.

3. Das reine (Vakuum-)Gravitationsfeld ließe sich durch die $g_{\mu\nu}$ statt durch die $h_{i,\nu}$ beschreiben. Dann hätten wir mit einer etwas anderen Abart des „zweiten Falles“ zu tun und bekämen wegen der allgemeinen Kovarianzgruppe vier Identitäten von der Gestalt $(\mathfrak{P}^a + \mathfrak{R}^{a4})\, c^4_{a\,r} = 0$.

Zusammenfassung

1. Verhält sich die Lagrangefunktion $\mathfrak{L}(Q_a; \dot{Q}_a)$ gegenüber der Gruppe[1])

$$(2')\quad \begin{cases} \delta x^\nu = a_r^{\nu,0}(x)\, \xi^r(x), \\ \delta Q_a = c^0_{a\,r}(x, Q)\, \xi^r + c^\sigma_{a\,r} \frac{\partial \xi^r}{\partial x^\sigma} \end{cases}$$

1) Der Übersichtlichkeit halber spezialisieren wir hier die Formeln auf den physikalisch wichtigen Fall $j = 1$.

wie eine skalare Dichte, so bestehen zwischen den Q und konjugierten Impulsen $\mathfrak{P}$ die Identitäten

$$(29') \qquad \mathfrak{F}_r \equiv \underline{\mathfrak{P}^a c^4_{a\,r}} = 0\,.$$

Falls nicht $\mathfrak{L}$, sondern $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'$ eine skalare Dichte ist, wobei $\mathfrak{L}'$ die zweiten Ableitungen der Q_a linear enthält, so tritt überall $\mathfrak{P}^a + \mathfrak{N}^{a4}$ an Stelle von $\mathfrak{P}^a$.

2. Infolgedessen ergibt die Auflösung der Gleichungen

$$\mathfrak{P}^a = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{Q}_a}$$

nach den $\dot{Q}_a$:

$$(31') \qquad \dot{Q}_a = \dot{Q}^0_a(\mathfrak{P}, Q) + \lambda^r c^4_{a\,r}\,,$$

mit willkürlichen Raumzeitfunktionen λ^r.

Die Hamiltonfunktion nimmt sodann die Form

$$(35') \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0(\mathfrak{P}, Q) + \lambda^r\, \mathfrak{F}_r$$

an. Die Grundgleichungen der Theorie sind die kanonischen Feldgleichungen, die kanonischen V.-R., die Nebenbedingungen

$$\mathfrak{F}_r = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\mathfrak{F}_r}{d x^4} = 0\,.$$

3. Die infinitesimale Transformation der Gruppe läßt sich darstellen durch

$$(45) \qquad \omega\, \delta^* \Phi = [\overline{\mathfrak{M}}, \Phi],$$

$$(46) \qquad \mathfrak{M} = \underline{\mathfrak{P}^a\, \delta Q_a} - \mathfrak{G}_\mu\, \delta x^\mu\,.$$

[Φ beliebiges, nur von Q und $\mathfrak{P}$ abhängiges Funktional; $\mathfrak{G}_\mu$ Impulsenergie(pseudo)dichte].

Ein Spezialfall von $\overline{\mathfrak{M}}$ auf einem beliebigen Schnitt $x^4 = x_0{}^4$ ist $\overline{\varepsilon^r\, \mathfrak{F}_r}$. Daraus folgt, daß die $\mathfrak{F}_r$ auf Grund von $\mathfrak{F}_r = 0$ untereinander vertauschbar, d. h. die Nebenbedingungen $\mathfrak{F}_r = 0$ verträglich sind.

Ferner ist vermöge der Feldgleichungen

$$(58) \qquad \frac{d\,\overline{\mathfrak{M}}}{d x^4} = 0\,,$$

woraus folgt

$$(63'') \qquad \overline{\mathfrak{M}} = \int d x^1\, d x^2\, d x^3 \left\{ \mathfrak{F}_r\, \frac{\partial \xi^r}{\partial x^4} - \frac{d \mathfrak{F}_r}{d x^4}\, \xi^r \right\}$$

und

$$\frac{d^2 \mathfrak{F}_r}{(d x^4)^2} = 0 \tag{64'}$$

auf Grund der Feldgleichungen (zeitliche Fortpflanzung der Nebenbedingungen).

4. Das Schema der Grundgleichungen bleibt gegenüber der Gruppe invariant.

5. Als Beispiele werden das elektromagnetische Feld, das Diracsche Materiefeld und das Gravitationsfeld samt deren Wechselwirkungen behandelt. Die dabei in Betracht kommenden Gruppen sind die Eichinvarianzgruppe, die echte Beinkovarianzgruppe und die Gruppe der allgemeinen Relativitätstheorie.

Was insbesondere die Gravitation betrifft, so ist es unmöglich, die betreffenden Feldgrößen gemäß der Fermischen Statistik zu quanteln.

Hrn. Prof. Pauli spreche ich meinen aufrichtigen Dank aus für die Anregung zu dieser Arbeit und seine wertvollen Ratschläge.

Zürich, Physik. Institut der Eidgen. Technischen Hochschule, den 5. März 1930.

(Eingegangen 18. März 1930)