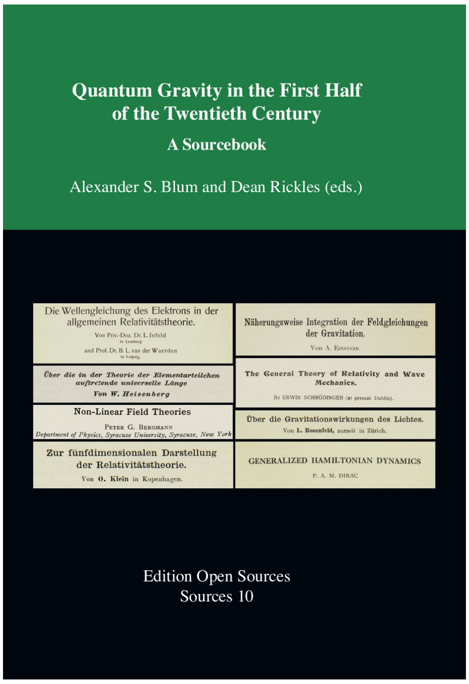
Edition Open Sources
Sources 10

Alexander S. Blum and Dean Rickles:

Victor Ambarzumian and Dmitri Iwanenko (1930): Zur Frage nach Vermeidung der unendlichen Selbstrückwirkung des Elektrons

DOI: 10.34663/9783945561317-27



In: Alexander S. Blum and Dean Rickles (eds.): *Quantum Gravity in the First Half of the Twentieth Century : A Sourcebook*
Online version at `https://edition-open-sources.org/sources/10/`

ISBN 978-3-945561-31-7, DOI 10.34663/9783945561317-00
First published 2018 by Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften, Edition Open Sources

The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at `http://dnb.d-nb.de`

Chapter 25
Victor Ambarzumian and Dmitri Iwanenko (1930): Zur Frage nach Vermeidung der unendlichen Selbstrückwirkung des Elektrons

Victor Ambarzumian and Dmitri Iwanenko (1930). Zur Frage nach Vermeidung der unendlichen Selbstrückwirkung des Elektrons. *Zeitschrift für Physik*, 64: 563–567.

Zur Frage nach Vermeidung der unendlichen Selbstrückwirkung des Elektrons.

Von **V. Ambarzumian** und **D. Iwanenko** in Charkow.

(Eingegangen am 21. Juli 1930.)

Es wird versucht, die in der Quantenelektrodynamik eintretende Schwierigkeit der unendlichen Rückwirkung des Elektrons auf sich selbst durch Einführung von Differenzengleichung anstatt Differentialgleichungen zu vermeiden. Diese Auffassung gestattet die von Klein* an einem Beispiel betonte Schwierigkeit der relativistischen Wellengleichung im wesentlichen zu beseitigen.

Die Quantenelektrodynamik von Heisenberg und Pauli** führt zu unendlicher Rückwirkung des Elektrons auf sich selbst. Der Grund dafür besteht in der in der Quantenmechanik bisher so gut bewährten Annahme des punktförmigen Elektrons. In der klassischen Theorie konnte man diese Schwierigkeit durch die Einführung eines endlichen Elektronenradius r_0 überwinden (obgleich auch nicht auf ganz einwandfreiem Wege). Eine solche Annahme ist in der Quantenmechanik nicht möglich.

Es hat nämlich überhaupt keinen Sinn, über die Struktur des Elektrons zu sprechen, da die Bestimmung derselben sich notwendig auf die Messung der Entfernungen zwischen je zwei Punkten des Elektrons zurückführen muß. Die Messung einer Strecke auf dem Elektron muß man aber z. B. mittels eines „γ-Strahlmikroskops" durchführen. Da der Radius des Elektrons sicher nicht größer als 10^{-12} cm ist, sind wir gezwungen, Strahlen mit einer Wellenlänge zumindest nicht größer als 10^{-13} cm zu benutzen. Dann wird der Elektronenradius in erster Näherung gemessen. Unter Einwirkung dieser Lichtquanten erleidet das Elektron einen Rückstoß, ändert also seine Geschwindigkeit. Die Größe der Geschwindigkeitsänderung hängt von der Richtung ab, ist aber von der Ordnung der Lichtgeschwindigkeit. Solche Unbestimmtheit in der Geschwindigkeit für den Beobachtungsmoment bedingt eine entsprechende Unbestimmtheit für die ausgerechnete Länge auf dem ruhenden Elektron, da die Lorentzkontraktion auch unbestimmt ist.

Es hat also überhaupt keinen Sinn, über die Form und Struktur des Elektrons im gewöhnlichen Sinne zu sprechen, denn der Fehler in der Bestimmung einer Länge auf dem Elektron hat die Größenordnung dieser Länge selbst. Es scheint daher nötig, den ganzen üblichen Begriff der

* O. Klein, ZS. f. Phys. **45**, 189, 1927.
** W. Heisenberg und W. Pauli, ZS. f. Phys. **61**, 1, 1929.

räumlichen Ausdehnung für solche kleinen Partikeln zu ändern. Hier möchten wir einen ganz vorläufigen Ausweg vorschlagen, der aber vielleicht dazu dienen kann, eine konsequente Theorie, die endgültig das Problem des Raumes in Quantenmechanik lösen wird, aufzusuchen.

1. Wir führen im dreidimensionalen Raume ein kubisches ganzzahliges Punktgitter mit der vorläufig noch unbestimmt bleibenden Gitterkonstante a ein.

Wir fordern, daß die Elektronen sich nur in Gitterpunkten befinden können, also nur die folgende Koordinaten haben sollen:

$$x = ka, \quad y = ma, \quad z = na \quad (k, m, n = 0, 1, 2 \cdots -1, -2 \cdots)$$

Wir müssen also alle Gleichungen der Atommechanik als Differenzengleichungen aufschreiben. Dabei sollen unsere Differenzengleichungen bei $a \to 0$ in gewöhnliche Differentialgleichungen der Quantenmechanik übergehen. Natürlich sollen dabei alle Koordinatendifferenzen endlich bleiben, also unsere Quantenzahlen k, m, n gegen ∞ streben. Die Lösungen der Differenzengleichungen müssen zu entsprechenden Lösungen von Differentialgleichungen konvergieren.

Angenähert können wir annehmen, daß jeder Operator $\partial/\partial x$ durch die entsprechende Differenzbildung $\varphi_x = \varphi(x + a) - \varphi(x)/a$ ersetzt wird. Die Form der Gleichungen bleibt dabei beibehalten*.

Unsere nächste Aufgabe ist die Berechnung der Wechselwirkung des Elektrons mit sich selbst. Dazu müssen wir die Greensche Funktion $g(p_1 p')$ der Laplaceschen Gleichung:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0 \tag{1}$$

bei $p = p'$ aufsuchen, denn die Rückwirkung des Elektrons mit sich selbst ist nach der Heisenberg-Paulischen Quantenelektrodynamik gleich:

$$\varepsilon = 2\, e^2 g\,(p_1 p) \tag{2}$$

[in der Arbeit von H. P. ist nur die elektrostatische Rückwirkungsenergie ausgerechnet, vom Betrag $\frac{1}{2}\, e^2 g\,(p_1 p)$. Wenn man aber auch die magnetische Wechselwirkungsenergie berücksichtigt, so muß man den viermal größeren Wert nehmen, denn bei Summation nach allen Zuständen können wir nicht die Glieder der Größenordnung $(v/c)^2$ vernachlässigen].

Wir begnügen uns mit einer approximativen Ausrechnung des Wertes von $g\,(p_1 p)$. Nehmen wir an, daß auf einem gewissen großen Abstand die Funktion $g\,(p_1 p')$ den gewöhnlichen Charakter des Coulombschen Gesetzes hat, d. h. die Form $1/r_{p\,p'}$, so erhalten wir aus unserer Diffe-

* R. Courant, K. Friedrichs und H. Loeny, Math. Ann. 100, 32, 1928.

renzengleichung ein System von linearen Gleichungen, welches $g(p_1 p)$ definiert. Dabei ist natürlich angenommen, daß das System in einen Kasten gelegt wird, der genügend große Abmessungen hat. Wir haben so viele Gleichungen, wie es Punkte innerhalb des Gebietes gibt, an dessen Rand wir die klassischen Werte von $g(p_1 p')$ vorgeschrieben haben.

Es wurden der Reihe nach die Gebiete mit einem, dann sieben und endlich 19 inneren Punkten genommen und die Rechnung durchgeführt. Dabei konvergierten die Werte von $g(p_1 p)$ schnell, und es ergibt sich mit hinreichender Genauigkeit:

$$g(p_1 p) = \frac{3{,}17}{a}\,. \tag{3}$$

Daraus folgt für die Selbstrückwirkungsenergie:

$$\varepsilon = \frac{6{,}34\, e^2}{a}\,. \tag{4}$$

Nehmen wir an, daß die Ruheenergie des Elektrons eine rein elektromagnetische Natur hat, d. h. $mc^2 = \varepsilon$, so erhalten wir:

$$a = \frac{6{,}34\, e^2}{m c^2}\,, \tag{5}$$

also der Größenordnung nach gleich dem klassischen Durchmesser des Elektrons.

Es wäre natürlich von Wichtigkeit, einen expliziten Ausdruck für das elektrostatische Wechselwirkungsgesetz zu bekommen.

2. Aus unseren Annahmen folgt unmittelbar die Existenz einer maximalen Packung des Raumes durch die Elektronen. Vorläufig sind wir dazu gezwungen, auch für die Protonen dasselbe Punktgitter anzunehmen. Dann folgt die Existenz eines maximalen möglichen Anstiegs des Potentials auf einer gegebenen Strecke der Länge a. Bringen wir nämlich zwei Schichten der Elektronen und Protonen auf eine solche Entfernung, so muß man zur Verwirklichung eines vorgeschriebenen Potentialsprungs (sagen wir z. B. $2\,mc^2$) eine bestimmte Anzahl der Partikel in jedem Flächenelement haben. Sei N die Anzahl der Partikel in der Flächeneinheit und l die Entfernung zwischen den Schichten, dann ist die Größe des Potentialsprungs gegeben durch:

$$V_2 - V_1 = 2\,\pi e^2 N l.$$

Setzen wir hier $V_2 - V_1 = 2\,mc^2$ und $l = a$, so bekommen wir für diesen Fall:

$$N = \frac{m c^2}{\pi e \varepsilon a}\,.$$

Aber nach (5) ist $\frac{mc^2}{\pi e^2} = \frac{6{,}34}{\pi a}$, und folglich:

$$N = \frac{3{,}17}{3{,}14} \cdot \frac{2}{a^2}. \tag{6}$$

Erinnern wir uns jetzt, daß gerade ein Sprung der Größe $2\,mc^2$ bei der von Klein durchgeführten relativistischen Behandlung des Durchgangs der Elektronen durch eine Potentialwand eine kritische Bedeutung hatte, daß nämlich im Falle eines größeren Sprunges die Wand vollkommen durchsichtig war.

Nun sehen wir, daß die dazu erforderliche Flächendichte der Partikel ungefähr gleich der maximal möglichen ist, welche nach unseren Vorstellungen überhaupt existieren kann (denn in jedem Gitterpunkt können sich nicht mehr als zwei Partikel mit entgegengesetzten Spinrichtungen befinden). Also gestattet die Einführung des diskontinuierlichen Raumes für diesen Fall das Kleinsche Paradoxon zu beseitigen.

Wenn der Abstand zwischen zwei Schichten größer ist als a und somit der maximale Potentialsprung größer als $2\,mc^2$, erscheinen die Verhältnisse recht kompliziert. Denn in der für den Durchgang der Barriere nötigen Zeit muß sich unsere Potentialwand erheblich zerstören infolge des Spiels der elektromagnetischen Kräfte zwischen Partikeln, welche die Potentialwand erzeugen, und infolge der Zerfließung der Wellenpakete der die Wand konstituierenden Partikel. Also muß sich die Höhe der Potentialwand vermindern.

Schluß. Die hier vorgeschlagene Quantelung ist nicht invariant gegen beliebige Drehungen und Verschiebungen der Koordinaten, aber es scheint uns die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, auf eine spezielle Weise die Invarianz der Gleichungen zu sichern. Vielleicht muß man das vierdimensionale Volumen als einfachste invariante Größe einführen und fordern, daß es immer eine bestimmte Anzahl der Gitterpunkte enthalte*.

Ein anderer geistreicher Vorschlag, die Transformationen des Gitterraumes zu behandeln, rührt von Herrn Dr. H. D. Ursell her, der eine Analogie mit dem Spinelektron ins Auge gefaßt hat. Man kann nämlich festsetzen, daß ein bestimmter Punkt des Gitters nach der Transformation eine bestimmte Wahrscheinlichkeit hat, in irgendwelchem Punkte des zweiten

---

* Dieser Gedanke war von Jordan ausgesprochen, der seinerseits zu einigen analogen Ideen über die Quantelung des Raumes gekommen war. Herrn Professor P. Jordan sind wir für die kritische Bemerkung zu diesen Überlegungen zu bestem Dank verpflichtet.

Gitters getroffen zu werden (so daß eine Wahrscheinlichkeit besteht, eine andere ganzzahlige Koordinate zu bekommen). Zwar lassen sich auf diese Weise Translationen streng behandeln, die Drehungen aber bieten größere Schwierigkeiten.

Es entsteht natürlich die Frage, ob die Zeit auch gequantelt sein solle. Die Antwort scheint notwendig positiv zu lauten. Ganz abgesehen von der notwendigen vierdimensionalen Symmetrie legt die Existenz einer minimalen Entfernung auch die Annahme einer *minimalen Wellenlänge* nahe, sowohl für das Licht als auch für die Materie; und somit kommen wir zur Existenz einer *maximalen Frequenz*. Und die maximale Frequenz des Lichtes bedeutet wahrscheinlich nichts anderes als das minimale Zeitintervall, sagen wir $\Delta t = \frac{1}{c} \Delta x$. Es möge nun versuchsweise diese maximale Lichtfrequenz der Größenordnung nach der Frequenz der Lichtquanten, die bei der Vernichtung der Protonen und Elektronen entstehen, gleichgesetzt werden. Es sei also

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = c \quad \text{und} \quad \nu_{\max} = \frac{M+m}{2h} c^2 = \frac{1}{\Delta t}.$$

Daraus folgt: $\frac{M}{m} \cdot \frac{e^2}{hc} \approx 1.$

Die empirische Tatsache der übereinstimmenden Größenordnung von Feinstrukturkonstante und Massenverhältnis der Protonen und Elektronen kann somit theoretisch verständlich gemacht werden.

Wir möchten danach hoffen, daß die hier entworfenen Überlegungen vielleicht zur Förderung der Kernprobleme beitragen könnten.

Anmerkung bei der Korrektur. Heisenberg hat eine analoge Quantelung versucht. Es ist ihm gelungen, die Differenzenwellengleichung für das freie Elektron zu integrieren. Dabei ergab sich die sehr merkwürdige Eigenschaft des maximalen Eigenwertes. Herrn Prof. W. Heisenberg müssen wir herzlich danken für seine liebenswürdige Mitteilung.

Charkow, Physikalisch-Technisches Institut.