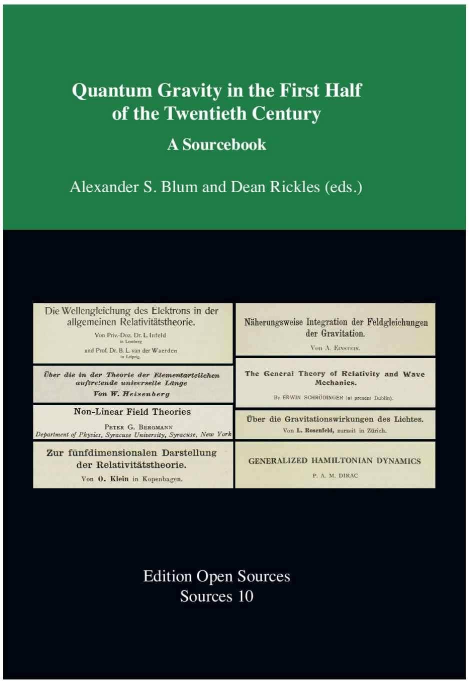
Edition Open Sources
Sources 10

*Alexander S. Blum and Dean Rickles:*

# Théophile de Donder and Frans Henri van den Dungen (1926): La quantification déduite de la Gravifique einsteinienne

DOI: 10.34663/9783945561317-08




In: Alexander S. Blum and Dean Rickles (eds.): *Quantum Gravity in the First Half of the Twentieth Century : A Sourcebook*
Online version at https://edition-open-sources.org/sources/10/

ISBN 978-3-945561-31-7, DOI 10.34663/9783945561317-00
First published 2018 by Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften, Edition Open Sources 

The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at http://dnb.d-nb.de

# Chapter 6
# Théophile de Donder and Frans Henri van den Dungen (1926): La quantification déduite de la Gravifique einsteinienne

Théophile de Donder and Frans Henri van den Dungen (1926). La quantification déduite de la Gravifique einsteinienne. *Comptes rendus*, 183: 22–24.

abscisses commune à nos deux travaux, ne donne pas un très bon accord : la courbe de Relf, moins rapidement ascendante, coupe la mienne vers $R = 350$, sous un angle notable.

En résumé, mes expériences sur les tourbillons alternés dans les liquides conduisent à des résultats en désaccord appréciable avec la loi de similitude dynamique, écarts qui me paraissent ne pouvoir être tous attribués à des erreurs de mesures [1].

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *La quantification déduite de la Gravifique einsteinienne.* Note de MM. **Th. De Donder** et **Fr. H. van den Dungen**, présentée par M. Hadamard.

Reportons-nous à l'équation (9) de la Note [2] parue dans ces *Comptes rendus* et due à l'un des auteurs de celle-ci. Introduisons la fonction invariante $F_\nu$ au moyen de

$$k S_\nu = ln F_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, N) \tag{1}$$

où $k$ représente une constante universelle. Cette équation (9) devient alors

$$I_\nu \equiv \sum_\varphi \sum_\psi g_*^{\varphi\psi} \left( \frac{\partial F_\nu}{\partial q_\varphi} - k\tau_\nu^{(e)} \Phi_\varphi^* F_\nu \right) \left( \frac{\partial F_\nu}{\partial q_\psi} - k\tau_\nu^{(e)} \Phi_\psi^* F_\nu \right) - (k\tau_\nu^{(m)} F_\nu)^2 = 0. \tag{2}$$

Prenons, par rapport à $F_\nu$, la dérivée variationnelle du multiplicateur $I\sqrt{-g_*}$ ; d'où

$$\frac{\delta(I_\nu\sqrt{-g_*})}{\delta F_\nu} \equiv \frac{\partial(I_\nu\sqrt{-g_*})}{\partial F_\nu} - \sum_{\varphi=1}^{f} \frac{\partial}{\partial q_\varphi} \left[ \frac{\partial(I_\nu\sqrt{-g_*})}{\partial \frac{\partial F_\nu}{\partial q_\varphi}} \right]. \tag{3}$$

---

(1) C'est aussi la conclusion de E. G. Richardson, auteur d'un autre travail récent sur les sons éoliens (*Proc. Phys. Soc. of London*, 36, 1924, p. 153); les fréquences des tourbillons y sont mesurées par les méthodes les plus variées dans l'air, dans l'eau et dans une solution de mélasse, R variant de 32 à 543, et S de 0,09 à 0,30, donc à peu près comme dans mes propres expériences.

Lors de la discussion qui a suivi la Communication de E. G. Richardson à la *Physical Society*, C. V. Drysdale propose comme une idée nouvelle ma méthode optique des rayons aberrants pour enregistrer les tourbillons.

(2) Th. De Donder, *Application de la relativité aux systèmes atomiques et moléculaires* (*Comptes rendus*, 182, 1926, p. 1380-1382).

En développant les calculs dans (3), on est amené à poser :

$$(4) \qquad \Delta_q F_\nu \equiv \frac{1}{\sqrt{-g_*}} \sum_\varphi \sum_\psi \frac{\partial}{\partial q_\varphi}\left(g_*^{\varphi\psi}\sqrt{-g_*}\,\frac{\partial F_\nu}{\partial q_\psi}\right);$$

$$(5) \qquad D \equiv \frac{1}{\sqrt{-g_*}} \sum_\varphi \sum_\psi \frac{\partial}{\partial q_\varphi}\left(g_*^{\varphi\psi}\sqrt{-g_*}\,\Phi_\psi^*\right);$$

$$(6) \qquad E \equiv \sum_\varphi \sum_\psi g_*^{\varphi\psi}\Phi_\varphi^*\Phi_\psi^*.$$

*Égalant la dérivée variationnelle* (3) *à zéro*, c'est-à-dire *en extrémant*

$$\int I_\nu \sqrt{-g_*}\,dq_1 \ldots dq_f,$$

nous obtenons, en utilisant les notations (4), (5) et (6),

$$(7) \qquad \Delta_q F_\nu - k\tau_\nu^{(e)} D F_\nu - k^2\left(E\tau_\nu^{(e)^2} - \tau_\nu^{(m)^2}\right)F_\nu = 0.$$

Nous pourrons disposer des potentiels $\Phi_\psi^*$ ($\psi = 1, \ldots, f$) de manière qu'on ait $D = 0$; c'est la généralisation de l'équation complémentaire de Maxwell. Ainsi, (7) devient

$$(8) \qquad \Delta_q F_\nu + R_\nu F_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, N),$$

où l'on a écrit

$$(9) \qquad R_\nu \equiv k^2\left(\tau_\nu^{(m)^2} - E\tau_\nu^{(e)^2}\right).$$

L'équation (8) doit être vérifiée en tout point de l'espace des configurations $q_1, \ldots, q_f$; elle peut être remplacée par l'*équation intégrale de Fredholm :*

$$F_{\nu P} = \int_q G_{\nu PM} R_{\nu M} F_{\nu M}\,\delta q_1 \ldots \delta q_f,$$

P et M étant deux points de l'espace $q$ et $G_{\nu PM}$ représentant la fonction de Green correspondante, à un facteur constant près. On a supposé que $F_\nu$ est donné sur la surface limitant l'espace $q$, ou, si l'espace $q$ est illimité, que $F_\nu$ tend vers zéro comme $r^{(1-f)}$ pour $f > 1$, ou comme $\log r$, pour $f = 1$; le symbole $r$ représente la distance radiale dans l'espace des configurations défini par

$$(\delta s)^2 \equiv \sum_\varphi \sum_\psi g_{\varphi\psi}^* \delta q_\varphi \delta q_\psi.$$

L'équation intégrale (10) peut encore être écrite quand le phénomène est périodique par rapport à certains degrés de liberté.

L'équation intégrale homogène (10) n'admettra de solution $F_\nu$ non identiquement nulle que pour une suite de valeurs déterminées et distinctes [1] de $R_\nu$. On obtient ainsi *la quantification grâce à la Gravifique einsteinienne.*

Ces résultats sont à rapprocher des importantes recherches de M. E. Schrödinger [2] concernant la quantification de certains systèmes *non* relativistiques.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *La mécanique ondulatoire de Schrödinger; une méthode générale de résolution par approximations successives.* Note de M. **Léon Brillouin**, présentée par M. Marcel Brillouin.

1. Schrödinger, développant les idées de L. de Broglie, a précisé récemment les grands traits d'une mécanique atomique ondulatoire [3]. Soit un système atomique, dont l'énergie potentielle est $V(q^1, \ldots, q^n)$, tandis que l'énergie cinétique T a pour expression

$$2T = \sum_{k,l} m_{kl}\, \dot{q}^k \dot{q}^l = \sum_{k,l} m^{kl} p_k p_l. \tag{1}$$

Les $m^{kl}$ sont des fonctions des coordonnées $q^k\ldots$, et nous appellerons $m$ le déterminant des $m^{kl}$. L'équation classique de Hamilton s'écrit

$$\sum_{k,l} m^{kl} \frac{\partial W_0}{\partial q^k} \frac{\partial W_0}{\partial q^l} + 2(V - E) = 0, \tag{2}$$

E représentant la constante de l'énergie. Schrödinger aboutit à l'équation générale suivante :

$$m^{\frac{1}{2}} \sum_{k,l} \frac{\partial}{\partial q^k} \left\{ m^{-\frac{1}{2}} m^{kl} \frac{\partial \psi}{\partial q^l} \right\} - \frac{8\pi^2}{h^2}(V - E)\psi = 0, \tag{3}$$

où $h$ est la constante de Planck. Les niveaux d'énergie quantifiés E sont les

---

(1) Nous supposons ici que le noyau de l'équation (10) ne possède pas de points d'indétermination ou de singularités essentielles.

(2) *Annalen der Physik*, Leipzig, 1926, vierte Folge, 79, p. 361-376, 489-527, 734-756.

(3) L. de Broglie, *Thèse;* E. Schrödinger, *Ann. der Phys.*, 79, 1926, p. 361, 489, 734; l'équation (3) ci-dessus se trouve dans Schrödinger, p. 310, équation (18), et p. 748, équation (31).